M

MATEMATICĂ

ENCICLOPEDIA DE BUZUNAR

$$f : A \to B$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\int f(x)\,dx$$

SOLOMON MARCUS

# Noţiuni de analiză matematică

SOLOMON MARCUS

# Noțiuni de analiză matematică

## originea, evoluția și semnificația lor



EDITURA ŞTIINŢIFICĂ • BUCUREŞTI 1967

COPERTA COLECȚIEI: T. MIRONESCU

## Către cititori,

Analiza matematică face parte de multă vreme din programa analitică a numeroase institute de învăţămînt superior. Pături din ce în ce mai largi de intelectuali vin în contact cu primele elemente ale acestei discipline, dar, din motive obiective, nu au posibilitatea să pătrundă mai adînc în problematica şi metodele ei. Acestei largi categorii de cititori, cărora nici timpul, nici natura ocupaţiilor nu le permite studierea sistematică şi aprofundată a analizei matematice, dar care doresc totuşi să capete o oarecare perspectivă asupra ei, li se adresează cartea de faţă. Ne adresăm oricui a trecut măcar o dată printr-o carte de analiză matematică de nivel universitar. Absorbit de dificultăţile tehnice pe care le întîmpină, cititorul unui manual sau tratat de analiză matematică pierde uneori din vedere tocmai partea vie a dezvoltării analizei, tendinţele care o animă, problemele din care se nasc noile noţiuni, sintezele pe care ea le operează. Dar o dată învinse dificultăţile tehnice cu caracter local, cititorul poate simţi nevoia unei retrospective în care atenţia principală să fie îndreptată asupra originii, semnificaţiei şi evoluţiei noţiunilor de bază, încercînd să desluşească dezvoltarea ulterioară a acestora. Am fi foarte bucuroşi dacă, pe acest drum, paginile care urmează îi vor fi de un oarecare ajutor.

În redactarea acestor pagini am fost însufleţiţi de perspectiva largă şi pasiunea pe care ni le-a transmis, de-a lungul anilor, profesorul nostru de analiză matematică, acad. Miron Nicolescu, ale cărui lecţii şi îndru-

mări contribuie în mod esențial, de vreo douăzeci de ani încoace, la dezvoltarea școlii românești de analiză.

Cititorii care doresc să cunoască și mai amănunțit chestiunile expuse în această carte se pot adresa manualelor și tratatelor de analiză apărute în ultima vreme la noi în țară. Dintre acestea, relevăm: pentru studenți, *Manual de analiză matematică*, în două volume, de acad. Miron Nicolescu, prof. N. Dinculeanu și prof. S. Marcus, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963 și 1964, și *Funcții reale și elemente de topologie generală* de acad. Miron Nicolescu, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967; pentru avansați și specialiști, tratatul *Analiză matematică*, în trei volume, al acad. prof. Miron Nicolescu, Editura Tehnică, București, în anii 1956, 1958, 1961.

Unele capitole ale cărții de față apar, poate, într-o lumină mai semnificativă abia după lectura unor capitole ulterioare; aceasta este, de exemplu, situația capitolelor I și III, a căror semnificație se întregește după lectura capitolului IV.

În definitivarea textului acestei cărți am profitat de observațiile prețioase ale prof. I. Barbălat și prof. C. Foiaș. Le exprim aici recunoștința mea.

**SOLOMON MARCUS**

7 octombrie 1966

# I

# De la funcții euleriene la funcții arbitrare; De la funcții arbitrare la funcții calculabile

## EVOLUȚIA NOȚIUNII DE FUNCȚIE, PÎNĂ LA EULER

În mod explicit, nici grecii, nici egiptenii nu au întrebuințat noțiunea de funcție. Ei au folosit însă expresia ariei unui cerc ca funcție de diametru și expresia sumei unei progresii aritmetice ca funcție de primul termen, de rație și de numărul termenilor. Încă înainte de era noastră s-au folosit corespondențe între mărimi, definite prin tabele. Primul tabel de sinusuri trigonometrice a fost calculat în secolul al V-lea î.e.n., fiind necesar în reperarea astrelor. Cu un secol înainte de era noastră, Hiparc dă un tabel cu calculul coardelor pentru unele arce circulare. Indienii au fost și ei în posesia acestei concepții geometrice și practice. Lucrările indienilor și grecilor s-au răspîndit în Europa abia în secolul al XV-lea. La sfîrșitul secolului al XV-lea s-a observat că corespondența $n \to a^n$ stabilește o legătură între adunarea a doi întregi și înmulțirea a două puteri cu exponent întreg. Această observație a condus — la jumătatea secolului al XVI-lea — la definiția logaritmilor (Stiffel, 1544). Tot în secolul al XVI-lea, un elev al lui Copernic, Rhaeticus, a alcătuit un tabel de linii trigonometrice ale arcelor din zece în zece secunde, valorile liniilor fiind calculate cu 15 cifre exacte. Matematicienii acestui timp aveau, fără să o exprime, o idee foarte netă despre ceea ce avea să se numească mai tîrziu continuitatea funcțiilor trigonometrice. La începutul secolului al XVII-lea (1614), Neper alcătuiește primul tabel de logaritmi. Paralel cu aceasta, cercetările matematicienilor italieni și cele ale lui Descartes asupra ecuațiilor algebrice conduc, în secolele XVI și XVII, la considerarea funcțiilor algebrice.

În timpul lui Descartes (1596—1650) şi Fermat (1601—1665) s-au considerat funcţii algebrice definite prin curbe geometrice simple, polinoame, fracţii raţionale, funcţii trigonometrice şi inversele lor, funcţia logaritmică şi cea exponenţială. De acest moment se leagă primul studiu sistematic al noţiunii de funcţie.

În terminologia lui Newton (1642—1727) funcţia este o fluentă, adică o cantitate care se scurge cu timpul; derivata e numită fluxiune, ea serveşte pentru a studia variaţia fluentei.

Cu Leibniz (1646—1716) şi J. Bernoulli (1667—1748), noţiunea de funcţie se eliberează de consideraţii accesorii şi ia o formă analitică. Termenul de funcţie este introdus abia la sfîrşitul secolului al XVII-lea de către J. Bernoulli.

Ţinînd seama de caracterul elementar al noţiunii de funcţie, este de mirare că pînă la sfîrşitul secolului al XVII-lea nu se introdusese nici un simbol special pentru a desemna o funcţie. J. Bernoulli a introdus pentru prima oară un astfel de simbol, notînd cu litera $X$ o funcţie de o singură variabilă. Întrebuinţarea unui simbol special pentru a desemna o necunoscută pare astfel a fi precedat cu peste 3 000 de ani întrebuinţarea unui simbol pentru o funcţie. Aceasta poate să pară curios unui spirit matematic modern, pentru care distanţa care separă cele două întrebuinţări e neînsemnată. Totuşi, un şcolar din zilele noastre învaţă încă de la 11 ani să noteze o necunoscută cu $x$, dar abia cu cîţiva ani mai tîrziu aude de funcţii şi învaţă să le noteze cu o literă specială.

La începutul secolului al XVIII-lea, definiţia noţiunii de funcţie capătă prin J. Bernoulli următoarea formă: o funcţie de o mărime variabilă este o cantitate compusă într-un anumit fel din această mărime variabilă şi din constante. Definiţia capătă un caracter ceva mai precis prin Euler: o funcţie este o expresie analitică compusă într-un fel oarecare cu ajutorul variabilelor şi cu constante. Euler (1707—1783) introduce variabila complexă şi funcţiile analitice, clasifică funcţiile în algebrice şi transcendente şi este primul care consideră funcţii implicite.

## STUDIUL SERIILOR TRIGONOMETRICE GRĂBEȘTE LĂRGIREA NOȚIUNII DE FUNCȚIE

Studiul vibrației coardelor în instrumentele de muzică îl conduce pe Euler să considere funcții mai generale decît cele analitice. La 1747, D'Alembert (1717—1783) a arătat că soluția problemei coardelor vibrante depinde de două funcții arbitrare supuse anumitor restricții. Euler a determinat soluția care corespunde unor anumite condiții inițiale, date de curbe trasate într-un mod arbitrar și nu numai de curbele analitice ale geometriei lui Descartes. Acestor funcții arbitrare, Euler le-a aplicat metodele rezervate, înainte de el, funcțiilor date prin expresii analitice, fără a controla dacă într-adevăr aceste funcții arbitrare admit o reprezentare analitică. În 1753, D. Bernoulli (1700—1782) dă soluția problemei coardelor vibrante cu ajutorul dezvoltării în serie trigonometrică. Compararea metodei lui cu cea a lui Euler pune problena reprezentării printr-o serie trigonometrică a unei funcții definite printr-o curbă arbitrară. În orice caz, studiul ecuației coardei vibrante a arătat de la început că anumite funcții discontinue pot fi reprezentate cu ajutorul unei serii trigonometrice convergente. Ideea de serie Fourier, adică de serie trigonometrică în care coeficienții sînt dați de formulele lui Fourier (1768—1830), aduce un spirit cu totul nou. Matematicienii se aflau în fața problemei: în ce condiții seria Fourier asociată unei funcții date este convergentă? Pentru a se răspunde la o astfel de întrebare nu mai erau suficiente metodele de calcul folosite, de pildă, de Lagrange (1736—1813) și Euler. Era nevoie, după cum spune Dirichlet, de înlocuirea calculului cu idei. Era nevoie de o definiție a corespondenței funcționale, independentă de orice formă de expresie analitică. O astfel de definiție avea să fie dată de Cauchy (1789—1857) și, mai tîrziu, de Riemann (1826—1866). Se spune că $y$ este funcție de $x$, dacă fiecărei valori bine determinate a lui $x$ îi corespunde o valoare bine determinată a lui $y$, indiferent de forma relației care leagă pe $x$ de $y$.

Această definiție a căpătat ulterior o formă mai precisă. O funcție este dată prin două mulțimi $X$ și $Y$ și o regulă $f$ care asociază fiecărui element din $X$ un element

bine determinat din $Y$. Deci funcţia nu este dată doar prin regula $f$, ci prin sistemul $<X, Y, f>$.

Pentru stabilirea în toată generalitatea şi cu toată rigoarea a proprietăţilor relative la funcţii, trebuia deci să nu mai intervină în raţionamente forma particulară a expresiei algebrice sau transcendente, prin care e actualizată o funcţie. Prin aceasta se generalizează însăşi noţiunea de curbă. Noţiunea de funcţie e eliberată de recurgerea exclusivă la intuiţia geometrică. Apare definiţia riguroasă a continuităţii, dată de Cauchy. Weierstrass construieşte o funcţie continuă care nu e derivabilă în nici un punct şi astfel iese la iveală discrepanţa dintre ideea de continuitate şi suportul ei intuitiv, geometric. Şi aşa, spiritul de rigoare introdus de Cauchy introduce şi riscurile unei noi crize. Suportul intuiţiei geometrice nu mai putea constitui baza raţionamentelor analizei. Din această criză, analiza avea să fie scoasă de teoria mulţimilor.

Din 1807 (data primelor lucrări ale lui Fourier asupra seriilor trigonometrice) pînă la 1873, cînd apar primele lucrări ale lui Cantor (1845—1918) două direcţii aveau să conducă la teoria mulţimilor. Una trece prin opera lui Cauchy, Dirichlet, (1805—1859), Fourier, Riemann, şi se referă la problema integrării funcţiilor; cealaltă prin operele lui Bolzano, (1781—1848), Dedekind (1831—1916), Weierstrass (1815—1897), Cantor şi se referă la principiile analizei şi la delimitarea domeniului ei.

## CARACTERUL ÎNŞELĂTOR AL NOŢIUNII GENERALE DE FUNCŢIE

La apariţia ei, noţiunea de funcţie continuă, în forma riguroasă dată de Cauchy, a indus în eroare pe matematicieni. Nu se sesiza cît de departe se poate situa această noţiune faţă de suportul ei intuitiv. Abia ulterior şi, în unele privinţe, abia în secolul nostru s-a putut înţelege întreaga generalitate a acestei noţiuni.

Cu noţiunea modernă de funcţie, lucrurile s-au întîmplat invers. Atunci cînd ea a fost introdusă, matematicienii aveau impresia că se află în faţa unei noţiuni foarte generale

și, tocmai de aceea, foarte săracă; în fața unei noțiuni care numai printr-o particularizare sau alta poate sa devină interesantă, să capete un conținut mai bogat, să conducă la o clasă de obiecte de oarecare însemnătate. Între expresiile analitice care făceau obiectul concepției euleriene asupra funcțiilor, pe de o parte, și funcția reala arbitrară de variabilă reală, pe de altă parte, se credea că este o distanță extraordinar de mare și nu se întrevedea vreo posibilitate ca matematica să stabilească puncte de contact între acești doi poli opuși. Această impresie înșelătoare provenea din faptul că matematicienii interpretau funcția arbitrară în sensul că sîntem liberi să alegem pentru fiecare punct al domeniului de definiție a funcției o valoare care ne convine, această alegere fiind independentă de alegerile făcute pentru celelalte puncte. Așa se explică stupoarea cu care a fost primită, la începutul acestui secol, teorema lui W. H. Young, care stabilea că pentru orice funcție de variabilă reală, în fiecare punct, exceptînd cel mult o mulțime numărabilă de puncte, mulțimea valorilor limită la stînga coincide cu mulțimea valorilor limită la dreapta. Un număr $\lambda$ este o valoare limită la stînga (respectiv la dreapta) a funcției $f$ în punctul $x_0$ dacă există un șir $\{x_n\}$ tinzînd către $x_0$, $x_n < x_0$ (respectiv $x_n > x_0$), pentru care $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$.

Astăzi însă care este situația? Studiul proprietăților generale ale funcțiilor a luat o asemenea amploare, încît lista proprietăților care aparțin acestor funcții a devenit impresionantă. Caracterul paradoxal pe care-l prezintă la prima vedere aceste proprietăți se șterge la o cercetare mai apropiată.

În fapt, noi nu putem decît să grupăm punctele domeniului de definiție într-un număr finit de mulțimi disjuncte și să ne dăm, pentru fiecare din aceste mulțimi, o anumită regulă de corespondență. Dacă totuși definim uneori o funcție folosind o infinitate de reguli, aceasta se explică prin faptul că regulile sînt deduse, printr-un număr finit de reguli, dintr-o colecție de asemenea finită de reguli. Această situație face ca valorile luate de funcție în diferite puncte repartizate în aceeași mulțime să nu fie complet independente, mărimea influenței unora

asupra celorlalte depinzînd de natura regulii de corespondenţă adoptate ca definiţie a funcţiei pe mulţimea considerată. Deci limitele naturale ale capacităţii noastre de intuiţie şi gîndire impun noţiunii generale de funcţie importante restricţii.

Mai există însă şi un alt aspect. Noţiunea generală de funcţie constă, aşa cum am mai arătat, dintr-un ansamblu de trei obiecte: o mulţime $A$ (mulţimea de definiţie), o mulţime $B$ şi o regulă $f$ care asociază fiecărui element din $A$ un element unic din $B$. O funcţie realmente arbitrară ar fi aceea pentru care nu numai că aplicaţia $f$ nu este supusă nici unei restricţii, dar mulţimile $A$ şi $B$ sînt şi ele arbitrare, deci la rîndul lor nesupuse nici unei restricţii. Însă ceea ce numim, de obicei, în analiză proprietăţi ale funcţiilor arbitrare sînt, de fapt, proprietăţi ale unor funcţii pentru care doar regula $f$ este arbitrară, în timp ce mulţimile $A$ şi $B$ sînt destul de particulare. În aceste condiţii, proprietăţile în cauză sînt, în ultimă instanţă, proprietăţi ale mulţimilor $A$ şi $B$. Să ne referim, de exemplu, la următoarele două teoreme care se demonstrează în teoria funcţiilor reale:

a) orice funcţie reală de o variabilă reală este suma a două funcţii cu proprietatea lui Darboux (1842—1917) şi limita unui şir de funcţii cu proprietatea lui Darboux [$f$ are proprietatea lui Darboux dacă, pentru orice interval $I$, $f(I)$ este un interval];

b) orice funcţie reală de o variabilă reală coincide aproape peste tot cu o funcţie cu proprietatea lui Darboux.

Observăm că aici mulţimile $A$ şi $B$ sînt chiar mulţimea $R$ a numerelor reale. Dacă $A$ şi $B$ ar fi mulţimi arbitrare, astfel de expresii ca „proprietatea lui Darboux" şi „aproape peste tot" şi-ar pierde sensul, şi propoziţiile a) şi b) n-ar mai putea fi nici măcar enunţate. Rezultă că aceste propoziţii reflectă ceva din structura dreptei numerice, deoarece ele se referă la aplicaţiile dreptei numerice în ea însăşi.

În această ordine de idei, trebuie să cităm aici rezultatele a doi matematicieni români care, în deceniul al treilea al secolului nostru, au obţinut unele rezultate interesante privind funcţiile reale arbitrare, de o variabilă reală.

*Florin Vasilescu* (1897—1958) în teza sa de doctorat, susţinută şi publicată la Paris în 1925, a întreprins un studiu sistematic al funcţiilor multiforme de variabile reale, deci al funcţiilor în definiţia cărora condiţia de univocitate a corespondenţei este înlăturată. Ulterior, într-un articol publicat în 1927, Florin Vasilescu a ilustrat eleganţa metodelor sale chiar pe exemplul funcţiilor reale obişnuite, de o variabilă reală, demonstrînd următoarea teoremă : Fiind dată o funcţie reală $f$ de o variabilă reală, există un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue, care converge către $f$ în orice punct în care aceasta din urmă este continuă.

*Alexandru Froda*, în teza sa de doctorat, susţinută şi publicată la Paris în 1929, consacră un amplu studiu aşa-numitelor proprietăţi de vecinătate (adică proprietăţilor cu caracter local) ale funcţiilor, demonstrînd, între altele, că punctele de discontinuitate de prima specie ale unei funcţii reale arbitrare, de o variabilă reală, formează o mulţime cel mult numărabilă. Pînă atunci se ştia doar că dacă o funcţie reală de o variabilă reală nu admite puncte de discontinuitate de a doua specie, atunci punctele ei de discontinuitate formează o mulţime cel mult numărabilă, adică o mulţime care se află în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale sau cu o parte a acesteia. (Amintim că un punct de discontinuitate $x_0$ al unei funcţii $f$ este de prima specie, dacă $f$ admite în punctul $x_0$ atît limită la stînga cît şi limită la dreapta; în cazul contrar, punctul de discontinuitate este de a doua specie.) Ulterior, numeroase alte articole ale lui Alexandru Froda au fost dedicate unor proprietăţi aparţinînd tuturor funcţiilor reale de o variabilă reală.

Autorul acestei cărţi a consacrat de asemenea un număr de articole funcţiilor reale arbitrare de o variabilă reală. Cităm aici unul dintre rezultatele obţinute: Orice funcţie reală de o variabilă reală este suprapunerea a două funcţii derivabile aproape peste tot. (O proprietate are loc „aproape peste tot“, dacă are loc în fiecare punct, exceptînd eventual punctele unei mulţimi de măsură nulă. O mulţime de puncte pe dreaptă este de măsură nulă, dacă ea poate fi

acoperită cu un șir de intervale de lungime totală oricît de mică.)

La sfîrșitul secolului precedent și începutul secolului nostru, cînd teoria funcțiilor reale abia își croia drum, exista un contrast între unitatea organică, eleganța și armonia pe care le prezenta teoria funcțiilor de variabilă complexă, pe de o parte, și lipsa de eleganță, caracterul migălos și complicat al raționamentelor și rezultatelor din teoria funcțiilor de variabilă reală pe de altă parte. Astăzi, teoria funcțiilor reale și-a recăpătat, pe o treaptă mai înaltă, simplitatea și pregnanța pe care le avea pe timpul lui Euler. O tendință puternică în teoria funcțiilor este întoarcerea la expresia euleriană, mai precis, la polinom. Dar această întoarcere nu se face pe vechiul drum, ci trece obligatoriu prin teoria funcțiilor generale (arbitrare).

## PUNCTUL DE VEDERE STATISTIC

Într-o conferință ținută la Congresul matematicienilor români din 1929 la Cluj, acad. O. Onicescu, amintind o apropiere făcută de W. H. Young între teoria funcțiilor și calculul probabilităților, unde sub aspectul dezordonat al elementelor se poate ascunde o lege generală, observa tendința tot mai accentuată de a se descoperi proprietăți care au loc în afara unei anumite mulțimi neglijabile și le numea „proprietăți statistice ale funcțiilor". Tocmai abordarea acestui punct de vedere statistic explică bogăția și fecunditatea rezultatelor în teoria modernă a funcțiilor.

Un exemplu sugestiv în această privință îl constituie teorema lui Denjoy-Young-Saks asupra numerelor derivate ale unei funcții arbitrare. Se știe că oricărei funcții reale de o variabilă reală i se asociază, în fiecare punct, patru numere derivate, definite ca limite extreme unilaterale ale raportului dintre creșterea funcției și creșterea variabilei. (De exemplu, numărul derivat superior la dreapta al funcției $f(x)$ în punctul $x_0$ este, prin definiție, limita superioară a raportului $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, cînd $x$ tinde că-

tre $x_0$ dinspre dreapta.) Apriori, între aceste patru numere derivate sînt posibile zeci de situații și orice încercare de a le impune, în fiecare punct, anumite egalități sau inegalități atrage o restrîngere considerabilă a clasei inițiale de funcții. Cercetările profunde ale lui Denjoy, Young și Saks au arătat însă că toată această diversitate a situațiilor numerelor derivate se petrece pe o mulțime care, în multe probleme, poate fi privită ca un deșeu, anume pe o mulțime de măsură nulă. (Amintim că o mulțime de puncte pe dreaptă este de măsură nulă dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există o familie cel mult numărabilă de intervale care acoperă mulțimea, astfel încît lungimea totală a acestor intervale este inferioară lui $\varepsilon$.) În afara acestei mulțimi „parazite", situația numerelor derivate ale unei funcții arbitrare poate fi caracterizată printr-o alternativă deosebit de pregnantă. Astfel, dacă numim „opuse" numărul derivat superior la stînga (respectiv la dreapta) și numărul derivat inferior la dreapta (respectiv la stînga), și „asociate" cele două numere derivate la stînga și cele două numere derivate la dreapta, se poate afirma că în fiecare punct, exceptînd punctele unei anumite mulțimi de măsură nulă, două numere derivate opuse sînt sau finite și egale sau infinite și de semne diferite; două numere derivate asociate sînt sau egale și finite, sau inegale, cel puțin unul dintre ele fiind infinit. Dar teorema are un caracter esențial statistic; fiind dat un punct oarecare, nu avem, în general, posibilitatea de a decide dacă acest punct aparține sau nu deșeului, mulțimii excepționale.

Tocmai acest punct de vedere statistic a permis stabilirea unei legături profunde între funcții generale și polinoame. O teoremă celebră a lui Weierstrass stabilește pentru orice funcție $f(x)$, continuă pe un interval închis și mărginit, existența unui șir de polinoame care converge uniform către $f(x)$. Metodele analizei clasice nu au putut, însă, arăta în ce măsură această posibilitate de aproximare prin polinoame se păstrează pentru funcții mai generale decît cele continue. Metodele subtile ale teoriei descriptive a funcțiilor, inaugurate de Baire (1874—1932) au permis să se stabilească între altele că, sacrificînd uniformitatea convergenței, posibilitatea de aproximare

prin polinoame se păstrează pentru clase întinse de funcții discontinue, întîlnite în practica matematică. Astfel, orice funcție derivată, orice funcție semicontinuă și orice funcție cu variație mărginită sînt limite convergente de polinoame. (O funcție $f$ este superior semicontinuă în punctul $x_0$ dacă, fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel încît $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ de îndată ce $|x - x_0| < \eta$. Înlocuind inegalitatea $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ prin $f(x) > f(x_0) + \varepsilon$, obținem definiția semicontinuității inferioare. Funcția $f$ este semicontinuă, dacă este în fiecare punct superior semicontinuă sau în fiecare punct inferior semicontinuă.) O astfel de teoremă are însă o valoare redusă din punct de vedere aplicativ, din cauza absenței uniformității convergenței.

În continuare, problema care se pune este de a stabili dacă nu cumva uniformitatea convergenței reapare de îndată ce înlăturăm o anumită mulțime de puncte, mulțime care, bineînțeles, nu trebuie să fie „prea mare“, adică să aibă o măsură inferioară unui număr pozitiv dat (pentru noțiunea de măsură, a se vedea capitolul IV).

În felul acesta, problema aproximării prin polinoame este pusă tocmai din punctul de vedere statistic despre care s-a vorbit mai sus. Pe de o parte, se obține o lărgire considerabilă a clasei de funcții care pot fi privite ca limite de polinoame; pe de altă parte, cu sacrificiul unei mulțimi „de măsură mică“, este asigurată uniformitatea convergenței șirului de polinoame către funcția respectivă. Rezultatele acestor cercetări [întreprinse în primul rînd de Luzin (1883—1950), Borel (1871—1956) și Fréchet] se pot rezuma astfel: fiind dată o funcție reală $f(x)$, măsurabilă și finită aproape peste tot pe $[a, b]$, există o mulțime $E$ de măsură nulă, conținută în $[a, b]$, și un șir $P_n(x)$ de polinoame, astfel încît, pentru orice $x \in [a, b] - E$, șirul $P_n(x)$ converge către $f(x)$. Fiind dat un număr pozitiv $\varepsilon$, există o mulțime $K$, închisă și mărginită, conținută în $[a, b]$, astfel încît măsura (în sensul lui Lebesgue) a mulțimii $[a, b] - K$ este inferioară lui $\varepsilon$, iar șirul $P_1(x)$, $P_2(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ converge, pe $K$, uniform către $f(x)$. (Măsura mulțimii $[a, b] - K$ este egală cu suma unei serii care are ca termeni lungimile intervalelor care nu

conțin în interior puncte din $K$. Evident, lungimea fiecărui astfel de interval e luată o singură dată.)

Și aici, ca și în teorema lui Denjoy-Young-Saks, este interesant să observăm caracterul esențial statistic al faptelor puse în evidență. Fiind dat un punct $x \in [a, b]$, nu sîntem în stare să decidem dacă acest punct aparține sau nu mulțimii excepționale $E$ (sau mulțimii excepționale $K$).

Teorema de mai sus dă tot ce se putea aștepta în problema aproximării prin polinoame; într-adevăr, cadrul natural al teoriei funcțiilor îl furnizează astăzi clasa funcțiilor măsurabile. Nu se cunoaște nici un exemplu individual de funcție nemăsurabilă. În schimb, este remarcabil faptul că se pot da exemple individuale de funcții care scapă oricărei reprezentări analitice, adică sînt în afara clasificării lui Baire. (Funcțiile continue alcătuiesc clasa zero. Funcțiile discontinue, care sînt limite de funcții continue, alcătuiesc clasa 1; funcțiile care nu sînt continue sau de clasă 1, dar se obțin ca limite de funcții de clasa 1, se numesc funcții de clasa 2, ș.a.m.d. Această clasificare se prelungește în transfinit. O funcție care nu este de nici o clasă finită, dar este limită de funcții de clasă finită, este de prima clasă transfinită.) Nu este totuși lipsit de interes să semnalăm un rezultat al lui Sierpiński, în virtutea căruia, cu sacrificiul unei mulțimi „ceva mai mari" decît în teorema de mai sus, se poate aproxima prin polinoame orice funcție reală de variabilă reală. Iată cum se enunță acest rezultat: Fiind dată o funcție reală $f(x)$, definită pe $[a, b]$, și un număr $\varepsilon > 0$, există un polinom $P(x)$, astfel încît mulțimea punctelor $x \in [a, b]$, pentru care inegalitatea $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ nu are loc, este de măsură interioară inferioară lui $\varepsilon$. (Prin măsura interioară a unei mulțimi $A$ conținute în $[a, b]$ se înțelege diferența dintre $b - a$ și măsura exterioară a mulțimii $[a, b] - A$. Noțiunea de măsură exterioară este definită în capitolul IV.)

## FENOMENE DE CONTINUITATE LA FUNCȚII DISCONTINUE

Roadele punctului de vedere statistic în teoria modernă a funcțiilor sînt, poate, și mai vizibile atunci cînd încercăm să detectăm fenomenele de continuitate ale unei funcții

reale de variabilă reală. Astfel, pentru funcțiile din clasificarea lui Baire, I. Maximov a stabilit, în urmă cu vreo douăzeci de ani, că pentru fiecare punct $x$, exceptînd cel mult o mulțime numărabilă de puncte, există o mulțime perfectă $P$ care se acumulează în $x$ dinspre stînga și o mulțime perfectă $Q$ care se acumulează în $x$ dinspre dreapta, astfel încît funcția este continuă în $x$ atît prin $P$, cît și prin $Q$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încît din $y \in P \cup Q$. $|y - x| < \eta$ rezultă $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. (O mulțime $P$ este perfectă dacă $P = P'$, unde $P'$ este mulțimea punctelor de acumulare pentru $P$. Un punct $x$ este de acumulare pentru o mulțime $A$ dacă orice interval care conține pe $x$ conține o infinitate de puncte din $A$.) În ce privește funcțiile măsurabile (a se vedea definiția lor în capitolul IV), Denjoy a stabilit, pe baza unei teoreme celebre a lui Luzin, că în fiecare punct, exceptînd cel mult o mulțime de puncte de măsură nulă, are loc așa-numita continuitate aproximativă (Hincin o numește asimptotică). Iată în ce constă acest tip de continuitate. Să notăm cu $\mu$ măsura Lebesgue (definită în capitolul IV), cu $I$ un interval care conține în interior punctul $x$ și cu $E$ o mulțime măsurabilă. Să presupunem că

$$\lim_{\mu(I)\to 0} \frac{\mu(E \cap I)}{\mu(I)} = 1.$$

În aceste condiții, spunem că mulțimea $E$ admite punctul $x$ ca punct de densitate. Să presupunem acum că există o mulțime $E$ care admite punctul $x$ ca punct de densitate și astfel încît funcția $f$ este continuă în $x$ prin mulțimea $E$. Aceasta înseamnă că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încît din $|y - x| < \eta$, $y \in E$, rezultă $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. În aceste condiții, spunem că funcția $f$ este aproximativ continuă în punctul $x$. În lumina acestei definiții, teorema lui Denjoy, enunțată mai sus, are un dublu caracter statistic. Acest caracter apare atît în modul de definiție al noii specii de continuitate, definiție în care apartenența sau nonapartenența unui punct $y \neq x$ la mulțimea $E$ nu poate fi decisă, cît și în validitatea doar în afara unei mulțimi nespecificate, dar de măsură nulă, a unei proprietăți. Oricît de artificială și de complicată ar putea să apară la prima vedere proprietatea enun-

ţată, trebuie să spunem că ea are o semnificaţie fizică deosebită, iar noţiunea de continuitate aproximativă s-a dovedit a fi mai adecvată concepţiei discontinue asupra materiei decît continuitatea clasică, introdusă de Cauchy.

Dacă părăsim clasa funcţiilor măsurabile, fenomenele de continuitate devin mai puţin pregnante. Totuşi, nu ne putem opri să spunem cîteva cuvinte despre o teoremă care şi astăzi, la peste 40 de ani de la apariţia ei, nu şi-a pierdut caracterul senzaţional şi care provoacă uimirea oricărui matematician. Este vorba de o teoremă stabilită de H. Blumberg şi care se enunţă în modul următor: Fiind dată o funcţie reală $f(x)$, definită pe un interval $[a, b]$, există o mulţime $E$ conţinută în $[a, b]$, densă peste tot în $[a, b]$ şi astfel încît $f(x)$ este continuă, prin mulţimea $E$, în fiecare punct al mulţimii $E$. Aceasta înseamnă că fiind dat un $x \in E$ şi un $\varepsilon > 0$, există un $\eta > 0$, astfel încît din $|y - x| < \eta$, $y \in E$ rezultă $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Această teoremă nu a putut fi ameliorată în nici un fel. De exemplu, W. Sierpiński a arătat că există funcţii pentru care mulţimea $E$ nu poate fi aleasă în aşa fel încît să fie nenumerabilă.

## O CRITICĂ A NOŢIUNILOR CLASICE ŞI O PLEDOARIE PENTRU NOŢIUNILE MODERNE

Dacă din punctul de vedere al dezvoltării interne a teoriei funcţiilor diversele rafinări la care sînt supuse noţiunile fundamentale ale analizei apar explicabile, nu mai puţin interesant ar fi de văzut în ce măsură se mai păstrează acele semnificaţii intuitive, fizice, deosebit de izbitoare pe care le prezintă noţiunile clasice ale teoriei funcţiilor. În ce măsură concepţia modernă asupra noţiunii de funcţie stă faţă de universul fizic într-alt raport decît concepţia euleriană? Iată, în această privinţă, opinia lui Denjoy, expusă în cadrul unei conferinţe ţinută la Paris în urmă cu vreo douăzeci de ani: „... Ce trebuie să aşteptăm de la teoria funcţiilor de variabilă reală, în ce priveşte înţelegerea mai bună a realităţii fizice?“

„Trebuie să o privim ca stilizînd, într-un sens opus analizei clasice, aspectul materiei. Reprezentarea unui aspect din natură printr-o funcţie euleriană indefinit derivabilă nu este sensibil exactă decît pentru observaţii la scară mare. Viteza unui avion văzut de departe poate să pară uniformă. Dacă însă din acest aparat se consideră doar o părticică şi se studiază traiectoria ei în decursul unei miimi de secundă, se va identifica o vibraţie a cărei viteză şi amplitudine vor masca şi vor domina mişcarea uniformă mijlocie a punctului material observat... O reprezentare euleriană, satisfăcătoare, la dimensiunile mijlocii, devine în întregime falsă în lumea infinitului mic".

„Teoria funcţiilor de o variabilă reală ne sugerează să asimilăm materia cu o mulţime perfectă total discontinuă. La o scară mijlocie, aceasta este echivalentă cu un număr finit de blocuri distincte şi separate. O astfel de imagine poate să convină modelului, să-i dovedească armătura, aşa cum funcţia euleriană îi descrie aspectul exterior. Dacă însă împingem la nesfîrşit îmbucătăţirea acestor blocuri, ne rămîne, la limită, un sistem de ace de recif în care nu mai găseşti nici o platformă, cît de mică, pe care să pui piciorul ..."

În sensul aceleiaşi pledoarii pentru o concepţie modernă neeuleriană asupra funcţiilor, vom da alte două citate din Denjoy (*Introduction à la thèorie des fonctions de variables réelles*, vol I, 1937, pp. 8, 9); iată de pildă, o critică a funcţiilor derivabile:

„... Sensul fizic al derivării, al diferenţierii, este următorul: Cînd se observă în jurul unui punct $M$, într-un cîmp de dimensiune $\delta$, un fenomen cu grosismentul $\frac{1}{\delta}$, fenomenul tinde să ia aspectul liniar pe măsură ce $\delta$ se micşorează. O suprafaţă fizică ia aparenţa unui plan, o mişcare punctuală tinde să se manifeste rectilinie şi uniformă etc. Iată ce ar trebui să ne arate natura, dacă noţiunea de derivată ar fi conformă cu realitatea lucrurilor. Dar nimic nu este mai puţin adevărat. Ori de cîte ori grosismentul sub care observăm un cîmp încearcă o creştere cît de cît însemnată, aspectul fenomenului considerat este în în-

tregime răsturnat. Neregularitatea nu se va atenua, ci se va modifica mereu. Capriciul configurațiilor și al mișcărilor pare să crească atunci cînd puterea de observare crește în același timp cu micimea cîmpului.

Noțiunea de derivată este falsă din punct de vedere fizic..."

Și iată o pledoarie pentru studiul funcțiilor discontinue:

„Oriunde ai deschide ochii îți apare discontinuul. Mulțimea punctelor care pot fi unite cu un centru optic $O$ printr-o rază rectilinie care nu întîlnește nici un obiect opac este o mulțime discontinuă. Să presupunem că o rază care pornește din punctul $O$ este definită prin caracteristicile ei unghiulare (azimutul $\varphi$ și distanța zenitală $\theta$). Distanța $r$, față de $O$, a unui punct de pe panorama situată pe această rază este o funcție $r = f(\varphi, \theta)$, care prezintă o discontinuitate ori de cîte ori raza, presupusă mobilă, atinge conturul aparent al unui obstacol opac, după cum conturul se detașează pe un alt obiect, plasat îndărătul primului, sau, dimpotrivă, pe cer.

Funcția $r(\varphi,\theta)$ este semicontinuă inferior. Din punct de vedere fizic, aceasta este specia cea mai naturală de funcție..."

În ciuda bogatelor semnificații fizice pe care le prezintă teoria funcțiilor de punct, ideea de „funcție de punct" este, în orice caz, mai puțin adecvată fenomenului fizic decît aceea de „funcție de mulțime". Încă în urmă cu treizeci de ani, Lebesgue atrăgea atenția asupra acestei situații în cartea sa clasică asupra integrării:

„... Nu trebuie deloc să ne mire că funcțiile de domeniu se introduc și apar în fizică mult mai bine adaptate nevoilor fizicianului decît funcțiile de punct. Un punct nu e decît concepția limită a unor corpuri din ce în ce mai mici, o funcție de punct nu se poate introduce în fizică decît ca limită a unei funcții de corp, a unei funcții de domeniu. Dacă totuși se vorbește puțin despre aceste funcții, aceasta se întîmplă numai pentru că matematicienii n-au creat încă algebra și analiza funcțiilor de domeniu. În schimb, în ce privește funcțiile de punct, avem la dispoziție mijloace remarcabil de comode. Utilizînd diferite artificii, care de fapt se reduc totdeauna la a nu raționa decît pe domenii destul de speciale pentru ca

ele să nu depindă decît de un număr finit de variabile, se înlocuiește utilizarea funcțiilor de domeniu cu aceea a funcțiilor de punct..."

În anii care s-au scurs de la apariția cărții lui Lebesgue, teoria funcțiilor de mulțime a luat o mare dezvoltare. S-a edificat o teorie completă a integrării unor astfel de funcții. Totuși, teoria funcțiilor de punct este și astăzi incomparabil mai avansată. Ar fi suficient să dăm ca exemplu teoria derivării, teorie care, în ce privește funcțiile de punct, a atins întreaga perfecțiune, dar se află încă într-un stadiu relativ înapoiat în ce privește funcțiile de mulțime.

## O SINTEZĂ SUPERIOARĂ: TEORIA DISTRIBUȚIILOR

A apărut însă un alt fenomen. S-a operat o sinteză a celor două tipuri de funcții — funcții de punct și funcții de mulțime — în cadrul unei teorii mai cuprinzătoare, așa-numita teorie a distribuțiilor. Este interesant că sugestia creării unei astfel de teorii provine, nemijlocit, din fizică, unde multă vreme s-a lucrat cu niște funcții avînd proprietăți imposibile din punctul de vedere al rigorii matematice, dar care își arătau, totuși, utilitatea. (De pildă, funcția lui Heaviside și funcția lui Dirac. Prima este egală cu zero pentru $x \leqslant 0$ și egală cu 1 pentru $x > 0$. Derivata funcției lui Heaviside este funcția $\delta(x)$ a lui Dirac, egală cu zero pentru $x \neq 0$ și avînd în origine o valoare atît de mare, încît

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1.$$

În felul acesta s-a încercat — și s-a reușit — scufundarea teoriei funcțiilor de punct într-o altă teorie, mai generală, teorie în cadrul căreia proprietățile paradoxale ale funcțiilor lui Heaviside și Dirac își găsesc o explicație firească și, prin aceasta, încetează de a mai fi paradoxale. Așa cum remarca un matematician, această scufundare a teoriei funcțiilor de punct într-o teorie a unor „funcții generalizate" se află într-o izbitoare analogie cu scufundarea teoriei numerelor raționale în teoria numerelor reale,

așa cum a fost ea efectuată, de pildă, de către Dedekind, prin celebra sa teorie a tăieturilor.

Dar cu aceasta intrăm într-o altă etapă a dezvoltării ideii de funcție, pătrundem într-un alt cerc de idei, într-un alt mod de gîndire matematică, un mod mai dinamic, în care un fenomen, pentru a putea fi înțeles, trebuie privit mereu într-o altă accepție, după natura împrejurărilor.

Noțiunea de distribuție (sau funcție generalizată) este, după cum indică chiar una dintre denumirile ei, o generalizare a noțiunii de funcție. Natura și scopul acestei generalizări amintesc întrucîtva (așa cum am semnalat și mai sus) de procesul prin care s-a trecut de la noțiunea de număr rațional la noțiunea de număr real. Pentru a obține noțiunea de număr real, se ia ca punct de plecare mulțimea numerelor raționale și se consideră toate șirurile de numere raționale care satisfac condiția lui Cauchy. (Amintim că un șir $\{a_n\}$ satisface condiția lui Cauchy dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon$ există un număr natural $N$, astfel încît, dacă $m > N$ și $n > N$, atunci $|a_n - a_m| < \varepsilon$.) Se introduce în mulțimea acestor șiruri o relație de echivalență și anume: două șiruri sînt echivalente dacă șirul diferență converge către zero. Clasele de echivalență astfel obținute constituie, prin definiție, numerele reale.

Pentru a obține noțiunea de distribuție, se ia ca punct de plecare mulțimea funcțiilor reale, definite pe un același interval $(A, B)$ (unde $-\infty \leqslant A < B \leqslant \infty$). Se introduc apoi următoarele două definiții:

Despre un șir $\{F_n\}$ de funcții reale definite pe $(A, B)$ spunem că converge pe $(A, B)$ aproape uniform către funcția $F$ și scriem $F_n \rightrightarrows F$, dacă $F_n$ converge uniform către $F$ pe orice interval compact conținut în $(A, B)$. (De exemplu, avem $x/n \rightrightarrows 0$ pe intervalul $(-\infty, \infty)$ și $[1+x/n]^n \rightrightarrows e^x$ pe același interval.) Se demonstrează imediat că dacă un șir de funcții converge uniform pe $(A, B)$, atunci el converge și aproape uniform pe $(A, B)$, dar reciproca nu este adevărată. Limita unui șir de funcții continue care converge aproape uniform pe $(A, B)$ este o funcție continuă pe $(A, B)$. Orice șir de funcții continue care

converge aproape uniform pe $(A, B)$ satisface condiţia lui Cauchy pe $(A, B)$. Vom nota prin $F_n \rightrightarrows$ faptul că şirul $\{F_n\}$ converge aproape uniform (către o funcţie); vom nota prin $F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n$ faptul că şirurile $\{F_n\}$ şi $\{G_n\}$ converg aproape uniform către una şi aceeaşi funcţie.

Despre un şir $\{f_n\}$ de funcţii continue pe $(A, B)$ spunem că este fundamental pe $(A, B)$ dacă există un şir $\{F_n\}$ de funcţii şi un număr întreg $K \geqslant 0$, astfel încît

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x) \text{ pe } (A, B) \tag{1}$$

şi

$$F_n \rightrightarrows \text{ pe } (A, B). \tag{2}$$

Aşa cum, pentru a se ajunge la noţiunea de număr real, se introducea o relaţie de echivalenţă în mulţimea şirurilor de numere raţionale care satisfac condiţia lui Cauchy, pentru a se ajunge la noţiunea de distribuţie, se introduce o relaţie de echivalenţă în mulţimea şirurilor fundamentale de funcţii continue pe $(A, B)$.

Vom spune că două astfel de şiruri $\{f_n\}$ şi $\{g_n\}$ sînt echivalente şi vom scrie

$$\{f_n\} \sim \{g_n\},$$

dacă există două şiruri $\{F_n\}$ şi $\{G_n\}$ de funcţii reale definite pe $(A, B)$ şi un număr întreg $K \geqslant 0$, astfel încît derivata de ordinul $K$ a funcţiei $F_n$ (respectiv $G_n$) pe $(A, B)$ să fie egală cu $f_n$ (respectiv $g_n$), iar şirurile $\{F_n\}$ şi $\{G_n\}$ converg pe $(A, B)$ aproape uniform către una şi aceeaşi funcţie. Cu alte cuvinte, avem pe $(A, B)$

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \qquad G_n^{(k)}(x) = g_n(x), \tag{3}$$

$$F_n \rightrightarrows \leftleftarrows G_n. \tag{4}$$

Se poate arăta că valoarea $K$ din definiţia de mai sus poate fi înlocuită prin orice alt număr întreg mai mare decît $K$.

Fiind date două şiruri fundamentale $\{f_n\}$ şi $\{g_n\}$ de funcţii continue pe $(A, B)$, ele sînt echivalente dacă şi numai dacă şirul format prin alternare

$$f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n, \ldots \tag{5}$$

este fundamental pe $(A, B)$. Într-adevăr, dacă șirul (5) este fundamental, există un număr întreg $k \geqslant 0$ și două șiruri $\{F_n\}$ și $\{G_n\}$ astfel încît sînt satisfăcute relațiile (3), iar șirul

$$F_1, G_1, F_2, G_2, \ldots, F_n, G_n, \ldots \tag{6}$$

converge aproape uniform pe $(A, B)$, ceea ce implică îndeplinirea condiției (4). Deci condițiile (3) și (4) sînt satisfăcute. Reciproc, dacă condițiile (3) și (4) sînt satisfăcute, atunci șirul (6) converge aproape uniform pe $(A, B)$, deci șirul (5) satisface relațiile (1) și (2).

Deoarece am numit relația $\sim$ o relație de echivalență, este necesar să arătăm că ea este, într-adevăr, reflexivă, simetrică și tranzitivă. Verificarea reflexivității și a simetriei este destul de simplă pentru a o lăsa pe seama cititorului; vom verifica aici doar tranzitivitatea relației $\sim$. Să presupunem că avem șirurile fundamentale $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ și $\{h_n\}$ de funcții continue pe $(A, B)$, astfel încît $\{f_n\} \sim \{g_n\}$ și $\{g_n\} \sim \{h_n\}$. Există deci un număr întreg $k$ nenegativ și două șiruri $\{F_n\}$ și $\{G_n\}$ satisfăcînd condițiile (3) și (4); există de asemenea un număr întreg nenegativ $l$ și două șiruri $\{\bar{G}_n\}$ și $\{H_n\}$ satisfăcînd relații de tipul (3) și (4):

$$\bar{G}_n^{(l)}(x) = g_n(x), \quad H_n^{(l)}(x) = h_n(x), \qquad \bar{G}_n \rightrightarrows\leftleftarrows H_n.$$

În baza unei observații de mai sus, putem presupune că $l = k$. În aceste condiții, punînd $\bar{H}_n = G_n - \bar{G}_n + H_n$, obținem

$$F_n^{(k)}(x) = f_n(x), \quad \bar{H}_n^{(k)}(x) = h_n(x), \quad F_n \rightrightarrows\leftleftarrows \bar{H}_n,$$

deci avem $\{f_n\} \sim \{h_n\}$ și proprietatea de tranzitivitate este stabilită. Rezultă că șirurile fundamentale de funcții continue pe $(A, B)$ se repartizează în clase de echivalență întocmai ca și șirurile de numere raționale care satisfăceau condiția lui Cauchy. Așa cum o clasă de șiruri Cauchy echivalente constituia, prin definiție, un număr real, o clasă de șiruri fundamentale de funcții continue constituie, prin definiție, o distribuție sau o funcție generalizată. Orice șir fundamental $\{f_n\}$ de funcții continue pe $(A, B)$ va reprezenta și funcția generalizată corespunzătoare.

Dacă $\{f_n\} \sim \{g_n\}$, atunci cele două șiruri reprezintă aceeași funcție generalizată.

Este clar că orice șir staționar (deci cu termeni egali) de funcții continue pe $(A, B)$ este fundamental pe $(A, B)$. Deci orice funcție continuă pe $(A, B)$ este în același timp o funcție generalizată pe $(A, B)$. Reciproca nu este însă adevărată; nu orice funcție generalizată se reduce la o funcție obișnuită, continuă pe $(A, B)$. Astfel, de pildă, este funcția generalizată definită de șirul

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-nx^2/2}\ .$$

Se poate arăta că acest șir este fundamental pe $(-\infty, \infty)$; funcția generalizată corespunzătoare reprezintă funcția $\delta$ a lui Dirac, despre care a fost vorba la începutul acestui paragraf. Această funcție a lui Dirac este un exemplu de funcție generalizată care nu poate fi identificată cu o funcție continuă.

Se poate arăta că două funcții continue distincte definesc totdeauna două funcții generalizate, de asemenea distincte. Noțiunea de funcție generalizată este deci o extensiune a noțiunii de funcție continuă. Se poate arăta că noua noțiune înglobează și o clasă largă de funcții discontinue. Analogia dintre acest nou concept și conceptul de număr real poate fi rezumată în felul următor:

| | |
|---|---|
| a) numere reale | a) funcții generalizate |
| b) numere raționale | b) funcții continue |
| c) șiruri Cauchy de numere raționale | c) șiruri fundamentale de funcții continue |
| d) șiruri Cauchy echivalente | d) șiruri fundamentale echivalente |
| e) numărul real este o clasă de șiruri Cauchy echivallente de numere raționale | e) funcția generalizată este o clasă de șiruri fundamentale echivalente de funcții continue |
| f) numere iraționale | f) funcții generalizate care nu se reduc la funcții continue |

Analogia desfășurată mai sus se referă la structura logică a celor două concepte. Dar ea funcționează nu mai puțin în ceea ce privește finalitatea conceptelor considerate.

Noţiunea de număr real se introduce pentru a legitima anumite operaţii cu numere raţionale, cum ar fi operaţia de extragere a rădăcinii pătrate din 2 sau aceea a logaritmării anumitor numere pozitive, operaţii care nu pot căpăta un sens atîta vreme cît rămînem în cadrul mulţimii numerelor raţionale. Conceptul de funcţie generalizată îndeplineşte o finalitate asemănătoare. Astfel, pentru a da un singur exemplu, se ştie că operaţia de derivare nu este posibilă pentru orice funcţie continuă; există chiar funcţii continue care nu sînt derivabile în nici un punct. În schimb, se poate arăta că operaţia de derivare capătă sens pentru orice funcţie generalizată; orice astfel de funcţie admite derivate de orice ordin. În particular, funcţiile continue vor admite şi ele, în noul cadru, derivate de orice ordin, dar aceste derivate nu mai sînt funcţii obişnuite, ci funcţii generalizate. Derivarea dubioasă a funcţiei lui Heaviside (şi obţinerea, pe această cale, a funcţiei lui Dirac) devine, în lumina noului concept de derivată, o operaţie perfect legitimă. Iată cum se defineşte operaţia de derivare a unei funcţii generalizate. Se arată mai întîi că printre şirurile fundamentale echivalente care definesc o funcţie generalizată se află obligatoriu şi un şir fundamental de polinoame $\{p_n\}$. Derivata de ordinul $m$ a funcţiei generalizate considerate va fi, prin definiţie, funcţia generalizată definită de şirul $\{p_n^{(m)}\}$, adică de şirul derivatelor de ordinul $m$ ale polinoamelor $p_n$ (se arată că şirul acestor derivate este fundamental).

În cazul particular în care o funcţie continuă admite derivate ordinare continue pînă la ordinul $m$, aceste derivate coincid cu derivatele în sensul teoriei funcţiilor generalizate.

Teoria funcţiilor generalizate sau — cum se spune mai frecvent — teoria distribuţiilor îşi are originile în fizica matematică, în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale şi în alte teorii matematice. Bazele ei au fost puse de către matematicianul francez Laurent Schwartz, după cel de-al doilea război mondial. Prezentarea făcută mai sus urmează o altă variantă, datorită matematicienilor polonezi I. Mikusiński şi R. Sikorski. La noi în ţară, teoria distribuţiilor a constituit obiectul multor cercetări. Remarcăm, în special, pe cele întreprinse de regretatul Alexandru Ghica, fost membru al Academiei şi profesor la Universitatea din Bucu-

rești, de profesorul Gh. Marinescu, membru corespondent al Academiei (autorul monografiei *Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions*, Akademie Verlag, Berlin, 1964) și, în colaborare cu prof. Romulus Cristescu, autor al monografiei *Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor*, Editura Academiei, București, 1966, de profesorul Romulus Cristescu (autorul cărții *Elemente de analiză funcțională și teoria distribuțiilor*, Editura Tehnică, București, 1966) și de alții.

O altă generalizare a noțiunii de funcție, care coincide cîteodată cu cea de distribuție, o constituie noțiunea de operator în sensul lui Mikusiński. Și această noțiune poate fi definită printr-un proces de completare. Fie $C([0, T))$ spațiul funcțiilor continue definite pe $[0,T)$ (unde $0<T\leqslant\infty$). Fie $f, g \in C([0, T))$. Vom defini o funcție $g * f$ prin

$$(\alpha) \qquad g * f(x) = \int_0^x g(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0, T).$$

Un șir $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T))$ se spune fundamental, dacă există $g \in C([0,T))$ neidentic nulă, astfel ca $g * f_n \rightrightarrows$. Două astfel de șiruri $\{f_n\}$ și $\{f'_n\}$ se numesc echivalente, dacă există $h \in C([0, T))$ neidentic nulă, astfel încît $h*(f_n - f'_n) \rightrightarrows 0$. Se arată ușor că în familia șirurilor fundamentale relația de echivalență de mai sus constituie o egalitate algebrică; prin urmare, această familie se împarte în clase de echivalență. Un operator în sensul lui Mikusiński este tocmai o astfel de clasă. Definiția inițială a lui Mikusiński diferă de aceasta. Folosirea definiției de mai sus a devenit posibilă în urma unei frumoase teoreme de aproximare, datorită lui Ciprian Foiaș (publicată în *Studia Math*, 1961).

Să definim cîteva operații cu operatori. Astfel, dacă $\{f_n\}$ și $\{f'_n\}$ sînt două șiruri fundamentale reprezentînd operatorii $\varphi$ și $\varphi'$, iar $g$ și $g'$ sînt funcțiile care apar în definirea faptului că șirurile $\{f_n\}$ și $\{f'_n\}$ sînt fundamentale, atunci $\{f''_n\}$, unde $f''_n = g * f'_n + g' * f_n$, este de asemenea un șir fundamental (se consideră $k = g * g'$ și se arată ușor că avem $k * f''_n \rightrightarrows$). Se poate arăta că clasa definită de $\{f''_n\}$ nu depinde de reprezentanții $\{f_n\}$ și $\{f'_n\}$ aleși , așa că prin considerațiile de mai sus se definește un operator $\psi$ care, prin

definiție, este suma $\varphi + \varphi'$ a celor doi operatori $\varphi$, $\varphi'$. În mod analog $\{f_n * f'_n\}$ este de asemenea fundamental (căci $k * f_n * f'_n = (g * f_n) * (g' * f'_n) \rightrightarrows$). Se arată de asemenea că clasa $\theta$ determinată de $\{f_n * f'_n\}$ nu depinde de reprezentanții $\{f_n\} \in \varphi$ și $\{f'_n\} \in \varphi'$ aleși. Prin definiție, acest operator $\theta$ este produsul $\varphi \times \varphi'$ al celor doi operatori. Mulțimea operatorilor înzestrați cu aceste două operații $+$ și $*$ devine un inel, numit inelul lui Mikusiński.

Orice funcție $f \in C([0, T))$ poate fi identificată cu un operator, anume cu clasa care conține șirul fundamental $\{f_n\}$, unde $f_n = f$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Se arată ușor că operația de adunare obișnuită și cea de „înmulțire" definită de ($\alpha$) pentru funcții coincid în acest caz cu cele definite pentru operatori. ■

## GRADE DE EFECTIVITATE

Diferitele funcții utilizate în analiză prezintă o mare varietate în ceea ce privește gradul lor de efectivitate, caracterul mai mult sau mai puțin constructiv al regulii care asociază fiecărui element din mulțimea de definiție un element din mulțimea valorilor. Între funcțiile cele mai „neefective", cum ar fi cele definite cu ajutorul axiomei lui Zermelo (enunțată și discutată în capitolul IV), și funcțiile definite printr-o regulă care comportă doar un număr finit de pași aplicați numerelor naturale există o scară bogată de trepte intermediare, corespunzătoare funcțiilor în a căror definiție se folosesc tipuri intermediare de efectivitate, cum ar fi utilizarea totalității numerelor transfinite de a doua clasă, utilizarea procedeului diagonal al lui Cantor (procedeu ilustrat de demonstrația nenumărabilității mulțimii numerelor reale) etc. A apărut din ce în ce mai pronunțat divorțul dintre existența matematică și construcția matematică. Încă la sfîrșitul secolului trecut, o dată cu amploarea luată de studiul mulțimilor infinite și ca urmare a apariției unor paradoxuri și antinomii generate de acest studiu, au început între matematicieni discuții aprinse asupra legitimității, în matematică, a unor obiecte care nu pot fi obținute într-un mod suficient de efectiv.

Aceste discuţii, care au continuat, cu intensitate crescîndă, în primele decenii ale secolului nostru, sînt acum de domeniul trecutului. În secolul trecut, matematicieni ca Kronecker (1823—1891) se declarau partizani înfocaţi ai finitismului, intenţionau să excludă din matematică întreaga teorie a lui Cantor privind mulţimile infinite. Kronecker vedea în teoria mulţimilor infinite o construcţie pur verbală. Intuiţionismul matematic, reprezentat în special de Brouwer, deşi mai puţin zelos decît Kronecker, respingea totuşi o bună parte din teoriile lui Cantor şi Zermelo (1871—1953), din logistica lui Peano (1858—1932) şi Russel, din ideile lui Hilbert (1862—1943) relativ la fundamentele matematicii. Acest exclusivism a fost înlocuit, treptat, printr-o înţelegere din ce în ce mai nuanţată a existenţei matematice. A devenit clar că matematica are nevoie de toate gradele de efectivitate, că noţiuni şi teoreme de un grad relativ mai mic de efectivitate ajută la înţelegerea şi aprofundarea unor teorii cu un grad de efectivitate mai mare. A înlătura din matematică obiectele a căror existenţă nu are un caracter constructiv înseamnă a limita în mod dăunător perspectiva acestei ştiinţe. Dar, în acelaşi timp, se impune o delimitare cît mai netă a acelei părţi din matematică pe care o putem obţine prin procedee de un anumit grad de efectivitate. În particular, a devenit din ce în ce mai stringentă necesitatea de a delimita acea parte a matematicii care poate fi introdusă în maşină. Aşa s-a născut matematica constructivă şi, ca un capitol important al acesteia, analiza matematică constructivă. Noţiunea de bază aici este aceea de funcţie calculabilă, înţelegînd prin aceasta o funcţie ale cărei valori pot fi obţinute cu ajutorul unui algoritm normal. Dar ...

## CE ESTE UN ALGORITM NORMAL?

Această noţiune a fost introdusă, în urmă cu vreo zece ani, de către matematicianul sovietic A.A. Markov, fiul marelui matematician A.A. Markov (1856—1922). Uneori, pentru a nu-i confunda, se vorbeşte despre A.A. Markov-tatăl şi A.A. Markov-fiul. A.A. Markov-tatăl a fost un mare

specialist în teoria probabilităților și a devenit celebru prin procesele pe care le-a introdus și le-a studiat, procese care sînt azi cunoscute sub numele de procese Markov. În ceea ce-l privește pe A.A. Markov-fiul, opera sa de căpetenie este *Teoria algoritmilor*, apărută în 1954, și despre care vom căuta să dăm unele noțiuni în cele ce urmează.

Să considerăm o mulțime $A$ de elemente numite litere. $A$ constituie un alfabet. Orice șir finit de litere, dintre care unele se pot repeta, se numește cuvînt peste alfabetul $A$ sau, dacă nu există pericol de confuzie, pur și simplu cuvînt. Mulțimea cuvintelor peste $A$ va fi notată prin $\mathcal{C}(A)$. Un element din $\mathcal{C}(A)$ este deci de forma:

$$a_1a_2 \dots a_i \dots a_n,$$

unde $a_i \in A$ $(i = 1, \dots, n)$. Lungimea unui cuvînt este, prin definiție, numărul literelor (distincte sau nu) care alcătuiesc acest cuvînt.

Fiind date două cuvinte, $\alpha = a_1 \dots a_i \dots a_n$ și $\beta = b_1 \dots b_j \dots b_m$, vom defini cuvîntul $\alpha\beta$ ca fiind egal cu

$$a_1a_2 \dots a_i \dots a_nb_1 \dots b_j \dots b_m.$$

În mod analog, fiind date trei cuvinte $\alpha, \beta, \gamma$, putem defini cuvîntul $\alpha\beta\gamma$ format prin alăturarea literelor din $\alpha$, $\beta$ și $\gamma$ în ordinea în care ele figurează în aceste cuvinte.

Se consideră și cuvîntul vid, notat prin $\theta$ și definit prin relația $\alpha = \alpha\theta = \theta\alpha$, oricare ar fi cuvîntul $\alpha$.

Fie două cuvinte $\alpha$ și $\beta$. Vom spune că $\beta$ este inclus în $\alpha$, dacă există două cuvinte $\gamma$ și $\delta$, astfel încît

$$\alpha = \gamma\beta\delta. \qquad (7)$$

Nu se exclude posibilitatea ca unul dintre cuvintele $\gamma$, $\delta$ sau fiecare dintre ele să fie cuvîntul vid. Rezultă deci că fiecare cuvînt este inclus în el însuși, iar cuvîntul vid este inclus în orice cuvînt.

Dacă $\beta$ este inclus în $\alpha$, alegem, dintre diferitele reprezentări ale lui $\alpha$, sub forma (7), pe aceea în care $\gamma$ are lungimea cea mai mică. (Se poate demonstra că există o astfel de reprezentare și numai una.) Reprezentarea lui $\alpha$ sub forma (7), cu $\gamma$ de lungime minimă, se numește prima incluziune a lui $\beta$ în $\alpha$.

Fie acum $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ și $\beta_1, \ldots, \beta_n$ cuvinte din $\mathcal{C}(B)$, unde $B$ este un alfabet care conține alfabetul $A$.

Să considerăm schema

(S) $\alpha_1 \rightarrow \beta_1, \alpha_2 \rightarrow \beta_2, \ldots, \alpha_i \rightarrow \beta_i. \ldots, \alpha_j \rightarrow \beta_j, \ldots, \alpha_n \rightarrow \beta_n$.

Cu ajutorul schemei (S) vom defini o funcție $\mathcal{A}$ care asociază unora dintre cuvintele din $\mathcal{C}(B)$ cîte un cuvînt bine determinat din $\mathcal{C}(B)$.

Fie $\pi$ un cuvînt din $\mathcal{C}(B)$. Dacă nici unul dintre cuvintele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nu este inclus în $\pi$, atunci punem prin definiție $\mathcal{A}(\pi) = \pi$. Dacă există un $\alpha_j$ inclus în $\pi$, atunci, alegînd pe $j$ astfel încît, pentru nici o valoare $k<j$, $\alpha_k$ să nu fie inclus în $\pi$, considerăm prima incluziune a lui $\alpha_j$ în $\pi$: $\pi = \gamma\alpha_j\delta$. După cum indică schema (S), înlocuim pe $\alpha_j$ cu $\beta_j$ și obținem cuvîntul $\pi_1 = \gamma\beta_j\delta$. Dacă săgeata de rang $j$ ar fi fost urmată de un punct (așa cum se întîmplă cu săgeata de rang $i$), atunci am fi pus $\mathcal{A}(\pi) = \pi_1$. In cazul contrar, cuvîntul $\pi_1$ este supus aceluiași tratament ca și cuvîntul $\pi$. Dacă nici un cuvînt $\alpha_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) nu este inclus în $\pi_1$, atunci punem $\mathcal{A}(\pi) = \pi_1$. În cazul contrar, fie $\alpha_k$ inclus în $\pi_1$, astfel încît $\alpha_m$ să nu fie inclus în $\pi_1$ pentru nici un $m< k$. Fie $\pi_1 = \varepsilon\alpha_k\omega$ prima incluziune a lui $\alpha_k$ în $\pi_1$. Urmînd indicația săgeții de rang $k$ din schema (S), înlocuim pe $\alpha_k$ prin $\beta_k$ și obținem cuvîntul $\pi_2 = \varepsilon\beta_k\omega$. Dacă săgeata de rang $k$ este urmată de un punct, atunci punem $\mathcal{A}(\pi) = \pi_2$. În cazul contrar, aplicăm lui $\pi_2$ același tratament pe care l-am aplicat anterior lui $\pi$ și lui $\pi_1$ ș.a.m.d.

Dacă, procedînd așa cum am arătat mai sus, nu ajungem niciodată la o săgeată urmată de un punct sau la un cuvînt $\pi_i$ în care să nu fie inclus nici unul dintre cuvintele $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, atunci funcția $\mathcal{A}$ nu se definește pentru cuvîntul $\pi$, cu alte cuvinte nu are sens să vorbim despre $\mathcal{A}(\pi)$. Dacă însă ajungem la o săgeată urmată de un punct sau la un cuvînt $\pi_i$, în care nu este inclus nici unul dintre cuvintele $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, atunci cuvîntul $\mathcal{A}(\pi)$ există și este unic determinat.

Funcția $\mathcal{A}$, definită mai sus, este, prin definiție, un algoritm normal peste alfabetul $B$. Schema (S) este schema algoritmului $\mathcal{A}$. Un algoritm normal este determinat prin schema (S).

Vom ilustra noțiunea de algoritm normal pe exemplul operației de adunare aplicată numerelor naturale. Cu acest prilej, se va înțelege și sensul considerării unui alfabet $B$ mai bogat decît alfabetul inițial $A$.

Fie un alfabet $A$ format dintr-o singură literă, pe care o vom reprezenta prin cifra 1. Vom reprezenta numerele naturale în baza 1; astfel, numărul 7 se reprezintă prin

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ .$$

Să considerăm $P$ numere naturale $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Fiecare dintre numerele $N_1, \ldots, N_p$ se poate reprezenta ca un cuvînt peste alfabetul $A$, ceea ce revine la reprezentarea sa în baza 1; pentru a reprezenta însă sistemul tuturor acestor $P$ numere naturale, mai este nevoie de un simbol; vom folosi în rolul acestui simbol auxiliar o steluţă: $*$. În felul acesta, obţinem un alfabet $B$ care conţine alfabetul $A$: $B = \{1, *\}$.

Sistemul celor $P$ numere naturale se reprezintă, în alfabetul considerat, prin cuvîntul

$$\alpha = \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{N_1 \text{ ori}} * \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{N_2 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{N_p \text{ ori}}. \tag{8}$$

Trebuie să găsim un algoritm $\mathcal{A}$ care transformă cuvîntul $\alpha$ în cuvîntul

$$\mathcal{A}(\alpha) = \underbrace{1\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1}_{N_1 + N_2 + \ldots + N_p \text{ ori}},$$

cuvînt care constituie reprezentarea în baza 1 a sumei $N_1 + \ldots + N_p$.

Să considerăm schema $(S)$ următoare:

$$\rightarrow \theta.$$

(Amintim că $\theta$ este cuvîntul vid.) Vom arăta că funcţia $\mathcal{A}$ definită de această schemă este tocmai algoritmul normal căutat.

Fie un cuvînt $\beta$ din $\mathcal{C}(A)$, deci care nu conţine cuvîntul $*$. Rezultă că $\mathcal{A}(\beta) = \beta$. Aceasta este natural, pentru că revine la situaţia în care cele $p$ numere care trebuie adunate se reduc la unul singur; acest număr va fi, evident, rezultatul adunării.

Fie acum un cuvînt $\alpha$ care conţine atît litera 1, cît şi litera $*$. Deci, $\alpha$ este de forma (8). Prima incluziune a lui $*$ în $\alpha$ este

$$\alpha = \gamma * \delta,$$

unde

$$\gamma = \underbrace{1\ldots 1}_{N_1 \text{ ori}},\ \delta = \underbrace{1\ldots 1}_{N_2 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ldots 1}_{N_p \text{ ori}}.$$

Aplicînd schema ($S$), obţinem cuvîntul

$$\alpha_1 = \gamma\theta\delta = \gamma\delta = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots 1}_{N_1 + N_2 \text{ ori}} * \underbrace{1\ldots 1}_{N_3 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ldots 1}_{N_p \text{ ori}}.$$

Prima incluziune a lui $*$ în $\alpha_1$ este

$$\alpha_1 = \gamma_1 * \delta_1,$$

unde

$$\gamma_1 = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots 1}_{N_1 + N_2 \text{ ori}},\ \delta_1 = \underbrace{1\ldots 1}_{N_3 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ldots 1}_{N_p \text{ ori}}.$$

Aplicînd schema ($S$), obţinem cuvîntul

$$\alpha_2 = \gamma_1\theta\delta_1 = \gamma_1\delta_1 = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots 1}_{N_1 + N_2 + N_3 \text{ ori}} * \underbrace{1\ldots 1}_{N_4 \text{ ori}} * \ldots * \underbrace{1\ldots 1}_{N_p \text{ ori}}.$$

Continuînd în acest fel, ajungem, după un număr finit de paşi, la cuvîntul

$$\alpha_{p-1} = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots 1}_{N_1 + \ldots + N_p \text{ ori}}$$

şi, deoarece $*$ nu este inclus în $\alpha_{p-1}$, rezultă că

$$\mathcal{A}(\alpha) = \alpha_{p-1}.$$

Să considerăm un algoritm normal $\mathcal{A}$ definit de schema ($S$). Pentru a fixa ideile, presupunem că singura săgeată urmată de un punct („săgeată finală“) este săgeata de indice $j$. Introducem pentru fiecare număr natural $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ operatorul $O_i$, care constă în a înlocui, în prima incluziune a cuvîntului $\alpha_i$ în cuvîntul prelucrat, pe $\alpha_i$ prin $\beta_i$. Mai introducem, pentru fiecare număr natural $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, condiţia logică $C_i$ = cuvîntul $\alpha_i$ este inclus în cuvîntul prelucrat. În sfîrşit, mai introducem condiţia logică identic falsă, condiţie pe care o reprezentăm prin $C_\omega$.

Să considerăm acum următorul şir de operatori şi de condiţii logice:

$$\underset{n+1}{\downarrow} C_1 \cdots \underset{n+j-1}{\downarrow} \quad \underset{n+j+1}{\downarrow} \quad \underset{2n}{\downarrow} C_1 \overset{1}{\uparrow} O_1 C_\omega \overset{n+1}{\underset{1}{\uparrow}} \downarrow C_2 \overset{2}{\uparrow} O_2 C_\omega \overset{n+2}{\uparrow} \cdots$$

$$\cdots \underset{j-1}{\downarrow} C_j \overset{1}{\uparrow} O_j C_\omega \overset{n+j}{\uparrow} \cdots \underset{n-1}{\downarrow} C_n \overset{n}{\uparrow} O_n C_\omega \overset{2n}{\uparrow} \underset{n}{\downarrow} \underset{n+j}{\downarrow}.$$

Această schemă prelucrează fiecare cuvînt $\alpha$ în cuvîntul $\mathcal{A}(\alpha)$, unde $\mathcal{A}$ este algoritmul normal definit de schema ($S$). Dacă $C_1$ se verifică, cu alte cuvinte dacă $\alpha_1$ este inclus în cuvîntul $\alpha$, atunci se aplică operatorul $O_1$, situat imediat la dreapta lui $C_1$, deci se înlocuieşte $\alpha_1$ prin $\beta_1$ în prima incluziune a lui $\alpha_1$ în $\alpha$. Urmează apoi condiţia $C_\omega$ care, fiind identic falsă, nu se verifică; deci, urmînd indicaţia săgeţilor de indice $n+1$, se începe din nou prin a se verifica condiţia $C_1$ etc. Dacă $C_1$ nu se verifică, cu alte cuvinte dacă $\alpha_1$ nu este inclus în $\alpha$, atunci, urmînd indicaţia săgeţilor de indice 1, se verifică condiţia $C_2$. Dacă $\alpha_2$ este inclus în $\alpha$, atunci $C_2$ este îndeplinită şi se aplică operatorul $O_2$, situat imediat la dreapta; urmează apoi verificarea condiţiei $C_\omega$ care, fiind identic falsă, nu e satisfăcută; deci, urmînd săgeţile de indice $n+2$, se reîncepe cu verificarea condiţiei $C_1$ etc.

O situaţie specială o prezintă $C_j$ şi $O_j$. Dacă $C_j$ se verifică, atunci se aplică operatorul $O_j$, apoi urmează condiţia identic falsă $C_\omega$; deci, urmînd săgeţile de indici $n+j$, ajungem la extremitatea din dreapta a schemei, prin urmare $\mathcal{A}(\alpha)$ a fost găsit.

## FUNCŢIILE CALCULABILE, PUNCT DE PLECARE ÎN ANALIZA CONSTRUCTIVĂ

Cu ajutorul noţiunii de funcţie calculabilă (adică de funcţie ale cărei valori pot fi determinate cu ajutorul unui algoritm normal) se defineşte noţiunea de număr real constructiv după cum urmează. Se introduce mai întîi noţiunea de şir calculabil de numere raţionale, ca fiind un şir de numere raţionale pentru care există o funcţie calculabilă care dă termenul de rang $n$. Apoi se defineşte noţiunea de

regulator de convergenţă al unui şir $\{a_n\}$, ca fiind o funcţie $f$ definită pe mulţimea numerelor naturale, cu valori în aceeaşi mulţime, şi astfel încît pentru $k \geqslant f(i)$, $l \geqslant f(i)$ avem

$$|a_k - a_l| < \frac{1}{2^i}.$$

Un şir calculabil de numere raţionale este, prin definiţie, calculabil convergent, dacă admite drept regulator de convergenţă o funcţie calculabilă. Se introduce o relaţie de echivalenţă în mulţimea şirurilor calculabile de numere raţionale, care sînt calculabil convergente. Clasele de echivalenţă astfel obţinute sînt, prin definiţie, numerele reale constructive.

Dezvoltarea analizei constructive urmează programul analizei clasice: convergenţa, numărul real, limita unei funcţii, continuitatea, derivata, formulele de medie, integrala, funcţiile cu variaţie mărginită, teoria măsurii etc. Însă această similitudine de program nu implică o similitudine corespunzătoare în ceea ce priveşte rezultatele obţinute. Astfel, orice funcţie reală calculabilă, de o variabilă reală constructivă, este continuă (în sens constructiv). Apropiind acest rezultat de faptul că în teoria distribuţiilor orice funcţie continuă este indefinit derivabilă, ne dăm seama că multe dintre punctele de vedere moderne relative la funcţii introduc un proces de regularizare, de înlăturare a anomaliilor; funcţiile tind să devină „din ce în ce mai cumsecade“.

## FUNCŢII CALCULABILE ÎN SENSUL LUI TURING

În 1936, deci înainte de construirea primelor calculatoare electronice, A.M. Turing a imaginat un model matematic de maşină care a permis introducerea unui concept riguros de calculabilitate. Calculabilitatea în sensul lui Markov este echivalentă cu cea în sensul lui Turing, dar deosebirile de ordin metodologic care există între ele le conferă grade diferite de comoditate în problemele atît de variate în care apare conceptul de calculabilitate. Deoa-

rece maşina Turing prezintă o deosebită importanţă în logica matematică şi în teoria maşinilor matematice, o vom prezenta în cele ce urmează, rămînînd ca după aceasta să expunem o a treia variantă a conceptului de calculabilitate, aceea care se introduce cu ajutorul funcţiilor recursive.

Înainte de a prezenta definiţia matematică a maşinii Turing, vom căuta să dăm o idee intuitivă despre acest concept, imaginîndu-l realizat ca o maşină fizică. O maşină Turing se compune din : *o unitate centrală*, care este susceptibilă de un număr finit de stări; *o bandă infinită*, divizată în celule, în fiecare celulă putînd fi înscris un simbol şi numai unul (iniţial, datele care urmează să fie prelucrate de către maşină sînt înscrise pe această bandă şi tot pe ea sînt înscrise şi rezultatele intermediare); *un organ de citire şi scriere*, care asigură comunicarea între unitatea centrală şi banda infinită. Acest organ nu poate acţiona simultan în mai multe celule ale benzii, el putînd executa exclusiv următoarele operaţii: înlocuirea unui simbol citit prin altul; deplasarea benzii, cu o celulă, la stînga sau la dreapta (fig. 1. I)

Iniţial, maşina se află într-o stare determinată (numită *starea iniţială*) şi citeşte un simbol înscris într-o celulă a benzii. Ca rezultat al acestei activităţi, maşina trece, eventual, într-o altă stare a unităţii centrale, ceea ce are ca urmare fie înlocuirea simbolului citit prin altul, fie suprimarea lui, fie deplasarea benzii, cu o celulă, la stînga sau

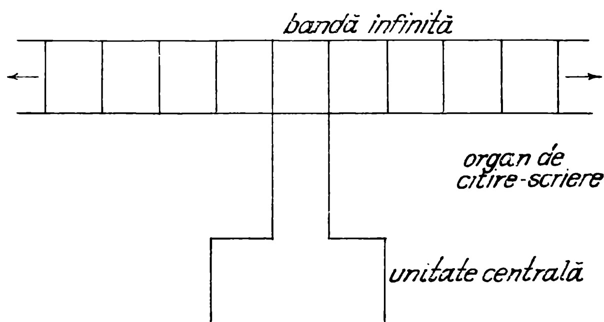



*Fig. 1.I.*

la dreapta. Să observăm că suprimarea unui simbol este un caz particular de înlocuire a simbolului, fiind o înlocuire cu așa-numitul *simbol vid*, a cărui prezență într-o celulă marchează tocmai faptul că celula respectivă este liberă. După ce au fost prelucrate toate simbolurile secvenței înscrise pe bandă, secvența obținută este rezultatul prelucrării primei secvențe cu ajutorul mașinii. Se poate însă întîmpla ca mașina să nu fie în stare să prelucreze unele secvențe, în sensul că activitatea mașinii se perpetuează, nefurnizînd prelucrarea completă a secvenței după nici un număr finit de etape (oricît de mare ar fi acest număr).

Să trecem acum la definirea riguroasă a conceptului de mașină Turing. Menționăm că varianta pe care o adoptăm nu coincide cu varianta dată de Turing, fiind o ameliorare a acesteia, datorită lui Emil L. Post și a altor matematicieni, variantă care corespunde la ceea ce Martin Davis numește *mașină Turing simplă*.

Fie un alfabet finit $(\mathbb{S}) = \{S_0, S_1, \cdots, S_n\}$, numit *alfabetul mașinii*. $S_0$ este numit uneori *blancul*, fiind interpretat ca simbolul vid și notat de multe ori prin litera $B$. A înlocui pe $S_i$ cu $S_0$ înseamnă deci pur și simplu a șterge pe $S_i$.

Fie $Q = \{q_1, q_2, \cdots, q_t\}$ o mulțime finită de elemente numite *stări*; $q_1$ este așa-numita *stare inițială*.

Fie $D$ și $S$ două simboluri noi, avînd semnificația de „deplasare la dreapta" și, respectiv, „deplasare la stînga". Numim *expresie* orice șir finit de elemente din mulțimea $\mathbb{S} \cup Q \cup \cup \{D, S\}$ (un același element putînd apărea de mai multe ori într-un șir).

O clasă specială de expresii ne va reține atenția; aceea a cvadrupletelor. Numim *cvadruplet* orice expresie care prezintă una din următoarele trei forme:

$$q_iS_jS_kq_l$$

$$q_iS_jDq_l$$

$$q_iS_jSq_l$$

Numim *cuplu inițial* al unui cvadruplet cuplul ordonat al primilor doi termeni ai săi. De exemplu, în cvadrupletul $q_iS_jS_kq_l$ cuplul inițial este $q_iS_j$. Numim *cuplu terminal*

al unui cvadruplet cuplul ordonat al ultimilor doi termeni ai cvadrupletului.

Numim *mașină Turing* o colecție de obiecte $<\mathbb{S}, Q, D, S, \Lambda>$, unde $\mathbb{S}$, $Q$, $D$ și $S$ au semnificația de mai sus, iar $\Lambda$ este o mulțime finită de cvadruplete care diferă, două cîte două, prin cuplul inițial.

Cuplul inițial al unui cvadruplet din $\Lambda$ reprezintă o *situație a mașinii*, în timp ce *evoluția ulterioară a mașinii* este indicată de cuplul terminal. Condiția ca două cvadruplete din $\Lambda$ să difere obligatoriu prin cuplul inițial imprimă mașinii Turing o *funcționare deterministă*, în sensul că unei anumite situații a mașinii îi corespunde o evoluție ulterioară unic determinată.

Cele trei tipuri de cvadruplete corespund la trei tipuri diferite de funcționare a mașinii. Un cvadruplet de forma $q_iS_jS_kq_l$ indică faptul că mașina, aflîndu-se în starea $q_i$ și citind simbolul $S_j$, îl înlocuiește pe acesta cu $S_k$ și trece în starea $q_l$. (Dacă avem $k = 0$, simbolul $S_j$ este pur și simplu șters.) Un cvadruplet de forma $q_iS_jDq_l$ indică faptul că mașina, aflîndu-se în starea $q_i$ și citind simbolul $S_j$ imprimă benzii o deplasare la dreapta și trece în starea $q_l$. Un cvadruplet de forma $q_iS_jSq_l$ indică faptul că mașina, aflîndu-se în starea $q_i$ și citind simbolul $S_j$, imprimă benzii o deplasare la stînga și trece în starea $q_l$. Să menționăm faptul că, în fiecare din cele trei cazuri este posibil ca $l = i$, deci ca mașina să persiste în starea în care deja se află.

Pentru a face o analogie cu un calculator fizic, am putea spune că o stare (internă) a mașinii Turing corespunde unei ipostaze a tuburilor și angrenajelor unui calculator fizic. Într-adevăr, funcția acestor tuburi și angrenaje este aceea de a determina actul următor al calculatorului. Banda unei mașini Turing corespunde memoriei unui calculator fizic. Dar aici apare o deosebire esențială între o mașină Turing și un calculator fizic; în timp ce acesta din urmă admite doar o regiune finită (memoria-esențial finită — a calculatorului) de stocare a datelor inițiale și a expresiilor intermediare, formate în cursul calculului, la o mașină Turing această regiune (care se confundă cu banda mașinii) este infinită. Mașina Turing este deci o mașină ideală.

Pentru a obţine o imagine mai dinamică, de proces, a activităţii unei maşini Turing, vom introduce noţiunea de *descriere instantanee*, înţelegînd prin aceasta o expresie printre ai cărei termeni se află un singur termen care reprezintă o stare, termen care nu este situat la extremitatea din dreapta a expresiei; în plus, expresia nu conţine nici o apariţie a lui $D$ sau a lui $S$. De exemplu expresia $q_2BS_3q_3S_1$ nu este o descriere instantanee, deoarece conţine două apariţii de stări. Nici expresiile $S_1S_2S_3q_2$ şi $q_1S_2D$ nu sînt descrieri instantanee, deoarece prima conţine o stare la extremitatea ei din dreapta, iar a doua conţine simbolul $D$. În schimb, expresiile $q_1S_1S_2S_2$ şi $S_1S_0S_2S_1q_2S_1$ sînt descrieri instantanee.

O descriere instantanee $\alpha$ este o *descriere instantanee a maşinii Z* dacă $q_i$ din $\alpha$ este o stare a maşinii $Z$, iar termenii din $\alpha$ care nu sînt stări, sînt elemente din alfabetul maşinii $Z$. Descrierea instantanee explică activitatea maşinii; prin suprimarea lui $q_i$ se obţine conţinutul benzii la un anumit moment, iar dacă $q_i$ este urmat de $S_j$, cuplul $q_iS_j$ defineşte situaţia maşinii la momentul respectiv.

Fie $\alpha$ şi $\beta$ două descrieri instantanee asociate maşinii $Z = \langle \mathfrak{S}, Q, D, S, \Lambda \rangle$. Spunem că $\beta$ *derivă direct* din $\alpha$ şi scriem $\alpha \to \beta$ (sau, dacă există posibilitate de confuzie în ceea ce priveşte maşina considerată, $\alpha \to \beta(Z)$), dacă are loc unul din următoarele cinci cazuri (unde $P$ şi $R$ sînt şiruri oarecare — eventual vide — de simboluri ale alfabetului $\mathfrak{S}$):

1) există $P$ şi $R$ astfel încît $\alpha = Pq_iS_jR$, $\beta = Pq_lS_kR$, unde $q_iS_jS_kq_l$ este un cvadruplet din $\Lambda$;

2) există $P$ şi $R$ astfel încît $\alpha = Pq_iS_kR$, $\beta = PS_jq_lS_kR$, unde $q_iS_jDq_l$ este un cvadruplet din $\Lambda$;

3) există $P$ şi $R$ astfel încît $\alpha = Pq_iS_j$, $\beta = PS_jq_lS_0$, unde $q_iS_jDq_l$ este un cvadruplet din $\Lambda$;

4) există $P$ şi $R$ astfel încît $\alpha = PS_kq_iS_jR$, $\beta = Pq_lS_kS_jR$, unde $q_iS_jSq_l$ este un cvadruplet din $\Lambda$;

5) există $R$ astfel încît $\alpha = q_iS_jR$, $\beta = q_lS_0S_jR$, unde $q_iS_jSq_l$ este un cvadruplet din $\Lambda$.

O descriere instantanee $\beta$ este *terminală* relativ la maşina $Z$, dacă nu există nici o descriere instantanee $\gamma$ a lui $Z$, astfel încît $\beta \to \gamma(Z)$.

Derivaţia directă are un caracter univoc, în sensul că dacă descrierile instantanee $\alpha$, $\beta$ şi $\gamma$ ale lui $Z$ sînt astfel încît $\alpha \rightarrow \beta$ şi $\alpha \rightarrow \gamma$, atunci $\beta = \gamma$. Într-adevăr, să presupunem că $\alpha = Pq_iS_jQ$, $\beta = Pq_lS_kQ$ şi $\gamma = Pq_rS_mQ$ (în celelalte cazuri se procedează în mod analog). Rezultă că maşina, aflîndu-se în starea $q_i$ şi citind pe $S_j$, înlocuieşte pe $S_j$ prin $S_k$ sau $S_m$ şi trece în starea $q_l$ sau $q_r$. Deci, dacă am avea $k \neq m$ sau $l \neq r$, s-ar contrazice caracterul deterministic al maşinii.

Se mai poate arăta că dacă $Z$ şi $Z'$ sînt două maşini Turing cu proprietatea că orice cvadruplet din $Z$ este şi un cvadruplet din $Z'$ (caz în care scriem $Z \subset Z'$), atunci din faptul că $\alpha \rightarrow \beta$ relativ la $Z$ rezultă că $\alpha \rightarrow \beta$ relativ la $Z'$.

Numim *calcul al maşinii Z* orice şir finit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots. \alpha_p$ de descrieri instantanee ale lui $Z$, astfel încît $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant p - 1$, iar $\alpha_p$ este terminală. Despre situaţia instantanee $\alpha_p$ spunem că este rezultatul prelucrării de către $Z$ a descrierii $\alpha_1$ şi scriem

$$\alpha_p = \mathrm{Rez}_Z(\alpha_1).$$

Pentru a ilustra noţiunile introduse mai sus, să considerăm cîteva exemple de maşini Turing:

a) fie maşina $Z = < \mathbb{S}, Q, D, S, \Lambda >$, unde $\mathbb{S} = \{S_0, S_1, S_2\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, iar $\Lambda$ este formată din următoarele cvadruplete:

$$\begin{array}{ll} (1) & q_1S_0Dq_1 \\ (2) & q_1S_2Dq_1 \\ (3) & q_1S_1Dq_2 \\ (4) & q_2S_1Sq_3 \\ (5) & q_2S_0Dq_1 \\ (6) & q_2S_2Dq_1 \\ (7) & q_3S_1S_2q_3. \end{array}$$

Să ne dăm acum un anumit cuvînt pe alfabetul ($\mathbb{S}$), fie el $S_1S_0S_2S_1S_1S_0S_1$, şi să cercetăm modul în care maşina $Z$ prelucrează acest cuvînt. Activitatea maşinii începe (ca la orice maşină Turing) în mod obligatoriu din starea iniţială $q_1$, deci prima descriere instantanee este

$$q_1S_1S_0S_2S_1S_1S_0S_1. \qquad (I)$$

Această descriere corespunde situației $q_1S_1$ a mașinii $Z$. Observăm că există un cvadruplet al lui $Z$, cel numerotat cu (3), al cărui cuplu inițial este $q_1S_1$. Acest cvadruplet arată că mașina, aflîndu-se în starea $q_1$ și citind simbolul $S_1$, imprimă benzii o deplasare la dreapta și trece în starea $q_2$. Descrierea instantanee (I) va fi deci urmată de descrierea instantanee

$$S_1q_2S_0S_2S_1S_1S_0S_1, \qquad \text{(II)}$$

așa cum rezultă din cazul 2, care apare în definiția derivației directe (avem I→II). Această descriere corespunde situației $q_2S_0$ a mașinii, situație care apare în cvadrupletul (5), al cărui cuplu inițial este într-adevăr $q_2S_0$. Acest cvadruplet arată că mașina, aflîndu-se în starea $q_2$ și citind simbolul $S_0$ , imprimă benzii o deplasare la dreapta și trece în starea $q_1$. Descrierea instantanee (II) va fi deci urmată de descrierea instantanee (rezultată tot din cazul 2 al definiției relației →)

$$S_1S_0q_1S_2S_1S_1S_0S_1. \qquad \text{(III)}$$

Această descriere corespunde situației $q_1S_2$ a mașinii, situație care apare în cvadrupletul (2). Acest cvadruplet arată că mașina, aflîndu-se în starea $q_1$ și citind simbolul $S_2$, imprimă benzii o deplasare la dreapta și persistă în starea $S_1$. Descrierea instantanee (III) va fi deci urmată de descrierea instantanee (obținută tot din cazul 2 al definiției relației →)

$$S_1S_0S_2q_1S_1S_1S_0S_1. \qquad \text{(IV)}$$

Această decriere corespunde situației $q_1S_1$ a mașinii, situație care apare în cvadrupletul (3). Efectul acestui cvadruplet asupra descrierii instantanee (IV) are ca rezultat descrierea instantanee (obținută tot prin referire la cazul 2 din definiția relației →)

$$S_1S_0S_2S_1q_2S_1S_0S_1. \qquad \text{(V)}$$

În această descriere apare situația $q_2S_1$, căreia îi corespunde cvadrupletul (4), al cărui cuplu inițial este într-adevăr $q_2S_1$. Acest cvadruplet arată că mașina, aflîndu-se în starea $q_2$ și citind simbolul $S_1$, imprimă benzii o deplasare

la stînga şi trece în starea $q_3$. Aceasta are ca efect înlocuirea descrierii (V) prin descrierea

$$S_1S_0S_2q_3S_1S_1S_0S_1, \quad \text{(VI)}$$

aşa cum rezultă din cazul 4 care apare în definiţia derivaţiei directe.

Descrierea instantanee astfel obţinută corespunde situaţiei $q_3S_1$ a maşinii, care indică acţiunea cvadrupletului (7). Acest cvadruplet arată că maşina, aflîndu-se în starea $q_3$ şi citind simbolul $S_1$, înlocuieşte pe $S_1$ prin $S_2$ şi persistă în starea $q_3$. Urmează deci descrierea instantanee

$$S_1S_0S_2q_3S_2S_1S_0S_1. \quad \text{(VII)}$$

Aici apare situaţia $q_3$ $S_2$, căreia nu-i corespunde în $\Lambda$ nici un cvadruplet. Aceasta înseamnă că activitatea maşinii încetează. Şirul de descrieri instantanee (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII) este un calcul al maşinii $Z$, deoarece descrierea VII s-a dovedit a fi terminală şi, pe de altă parte, avem $\text{I} \to \text{II} \to \text{III} \to \text{IV} \to \text{V} \to \text{VI} \to \text{VII}$. Putem deci scrie $S_1S_0S_2q_3S_2S_1S_0S_1 = \text{Rez}_Z(q_1S_1S_0S_2S_1S_1S_0S_1)$, ceea ce înseamnă că rezultatul prelucrării cuvîntului $S_1S_0S_2S_1S_1S_0S_1$ de către maşina $Z$ este cuvîntul obţinut din VII prin ştergerea lui $q_3$: $S_1S_0S_2S_2S_1S_0S_1$.

După cum am văzut, maşina $Z$ a putut efectua prelucrarea cuvîntului $S_1S_0S_2S_1S_1S_0S_1$ într-un număr finit de etape, în sensul că după un număr finit de etape activitatea maşinii încetează. Se poate însă întîmpla ca înscriind pe banda unei maşini Turing un anumit cuvînt, prelucrarea sa de către maşină să continue indefinit, în sensul că la fiecare etapă se obţine o descriere instantanee neterminală în raport cu maşina considerată. Să luăm, de exemplu, cuvîntul $S_1S_2S_2$ şi să-l înscriem pe banda maşinii analizate mai sus, la punctul a). Pornind din starea $q_1$ şi citind primul simbol al cuvîntului considerat, se obţin, aplicînd succesiv cvadrupletele (3), (6), (2) şi (1), următoarele descrieri instantanee:

$$q_1S_1S_2S_2$$
$$S_1q_2S_2S_2$$
$$S_1S_2q_1S_2$$
$$S_1S_2S_2q_1S_0$$
$$S_1S_2S_2S_0q_1S_0.$$

Observăm că prin efectul cvadrupletului (1), penultima descriere instantanee a condus la o descriere instantanee asupra căreia acționează același cvadruplet (1). (Adăugarea, la extremitatea din dreapta, a unei descrieri instantanee a simbolului vid $S_0$ nu afectează cu nimic descrierea respectivă.) În felul acesta, situația $q_1S_0$ devine perpetuă, iar aplicarea cvadrupletului (1) se repetă de o infinitate de ori, conducînd la descrieri instantanee de forma

$$S_1S_2\underbrace{S_2S_0S_0\ldots S_0}_{n \text{ ori}}q_1S_0.$$

unde $n$ este un număr natural arbitrar;

b) să considerăm mașina $Z = < \mathcal{S}, Q, D, S, \Lambda >$, unde $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, iar $\Lambda$ este alcătuită din următoarele cvadruplete: $q_1S_0Dq_1$, $q_1S_1Dq_1$, $q_1S_3Dq_1$, $q_1S_2S_3q_2$, $q_2S_3Sq_3$, $q_3S_0S_3q_3$, $q_3S_1S_3q_3$, $q_3S_2S_3q_3$. Un exemplu de calcul al mașinii $Z$ este următorul $S_1q_1S_0S_3S_2 \to \to S_1S_0q_1S_3S_2 \to S_1S_0S_3q_1S_2 \to S_1S_0S_3q_2S_3 \to S_1S_0q_3S_3S_3$, deci avem

$$\mathrm{Rez}_Z\,(S_1q_1S_0S_3S_2) = S_1S_0q_3S_3S_3.$$

Rezultă că cuvîntul $S_1S_0S_3S_2$ este prelucrat în cuvîntul $S_1S_0S_3S_3$. Un alt exemplu de calcul al aceleiași mașini este următorul:

$$q_1S_2 \to q_2S_3 \to q_3S_0S_3 \to q_3S_3S_3, \text{ deci}$$

$$\mathrm{Rez}_Z(q_1S_2) = q_3S_3S_3,$$

ceea ce înseamnă că cuvîntul $S_2$ este prelucrat de $Z$ în cuvîntul $S_3S_3$.

Iată acum și un exemplu de descriere instantanee $\alpha$ pentru care $\mathrm{Rez}_Z(\alpha)$ nu este definit. Fie $\alpha = S_1q_1S_0S_3S_1$. Avem $\alpha \to S_1S_0q_1S_3S_1 \to S_1S_0S_3q_1S_1 \to S_1S_0S_3S_1q_1S_0 \to S_1S_0S_3S_1S_0q_1S_0 \to \ldots$; observăm că situația $q_1S_0$ se repetă într-o infinitate de descrieri instantanee succesive, fiecare derivînd direct din cea precedentă.

Pentru ca o mașină Turing să efectueze nu numai calcule *simbolice* ci și calcule *numerice*, este necesar să introducem o reprezentare convenabilă a numerelor. Alegem

un simbol de bază, de exemplu pe $S_1$, pe care-l notăm aici 1, și reprezentăm cu ajutorul lui orice număr natural. Vom folosi bineînțeles și simbolul vid (blancul) $B$. Precizăm că fiind dat un simbol $k$, folosim notațiiiile

$$k^n = \underbrace{kk\ldots k}_{n \text{ ori}},\ k^0 = B.$$

Fiecărui număr natural $n$ îi asociem expresia $\bar{n}$ egală, prin definiție, cu $1^{n+1}$. De exemplu, $\bar{3} = 1^4 = 1111$. Fiecărui sistem ordonat de $p$ numere naturale (0 fiind și el considerat număr natural) $<n_1, n_2, \cdots, n_p>$ îi asociem expresia

$$\overline{<n_1, n_2, \ldots n_p>} = \bar{n}_1 B \bar{n}_2 B \ \ldots . B \bar{n}_p.$$

De exemplu,

$$<\overline{2, 3, 0}> = 111B1111B1.$$

Notațiile introduse vor fi folosite pentru exprimarea datelor inițiale (de intrare). În ceea ce privește expresiile de ieșire, vom folosi o altă notație, și anume: fiind dat un șir finit $M$ de elemente din $\mathfrak{S} \cup Q$, notăm cu $<M>$ numărul de apariții ale lui 1 (deci ale lui $S_1$) în M. De exemplu: $<11BS_4q_3> = <S_1S_1BS_4q_3> = < S_1S_1S_0S_4q_3> = 2$; $<q_3q_2S_5> = 0$. Observăm că

$$<\overline{m-1}> = <1^m> = m.$$

Este ușor de demonstrat egalitatea $<MN> = <M> + <N>$.

Fie acum o mașină Turing $Z$. Pentru fiecare număr întreg pozitiv $n$ asociem lui $Z$ o funcție $\psi_Z^{(n)}$ definită pe o parte a produsului cartezian $\mathcal{N}^n$ și cu valori în $\mathcal{N}$ (mulțimea numerelor naturale) după cum urmează. Fiind dat sistemul ordonat $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ de $n$ numere naturale, punem

$$\alpha_1 = q_1\overline{(m_1, m_2, \ldots, m_n)},$$

obținem astfel o descriere instantanee a lui $Z$ (deoarece $q_1$ este starea inițială a lui $Z$, iar $S_1 = 1$ este aici un simbol din alfabetul mașinii $Z$). Dacă există un calcul al lui $Z$ care începe cu $\alpha_1$, fie acest calcul $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, atunci funcția $\psi_Z^{(n)}$

este definită în punctul $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ din $\mathcal{N}^n$ şi punem, prin definiţie,

$$\psi_Z^{(n)}(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \langle\alpha_p\rangle = \langle \mathrm{Rez}_Z(\alpha_1)\rangle.$$

Dacă nu există nici un calcul al maşinii $Z$ care începe cu descrierea instantanee $\alpha_1$, deci dacă

$$\mathrm{Rez}_Z(\alpha_1)$$

nu este definit (ceea ce revine la perpetuarea activităţii lui $Z$), atunci funcţia $\psi_Z^{(n)}$ nu este definită în punctul $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Cu alte cuvinte, funcţia $\psi_Z^{(n)}$ este definită exact în acele puncte ale lui $\mathcal{N}^n$ care furnizează descrieri instantanee pe care maşina $Z$ le poate prelucra într-un număr finit de etape.

Fie acum o funcţie $f$ definită pe o parte a produsului cartezian $\mathcal{N}^n$ şi cu valori în $\mathcal{N}$. Vom spune că $f$ este o *funcţie parţial calculabilă în sensul lui Turing*, dacă există o maşină Turing $Z$, astfel încît

$$f = \psi_Z^{(n)}.$$

Aceasta înseamnă că funcţiile $f$ şi $\psi_Z^{(n)}$ au aceeaşi mulţime de definiţie şi iau valori egale în fiecare punct în care sînt definite. Se mai spune în acest caz că *maşina $Z$ calculează funcţia $f$*. Dacă, în plus, funcţia $f$ este *totală* (adică definită în fiecare punct al produsului cartezian $\mathcal{N}^n$), atunci spunem că $f$ este o *funcţie calculabilă în sensul lui Turing.*

Pentru ilustrare, să arătăm că funcţia $f(x, y) = x + y$ definită pe $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ este o funcţie calculabilă în sensul lui Turing. În acest scop, construim o maşină $Z = \langle \mathcal{S}, Q, D, S, \Lambda\rangle$, unde $\mathcal{S} = \{B, 1\}$, iar componentele $Q$ şi $\Lambda$ vor fi alese astfel încît

$$\psi_Z^{(2)}(x, y) = x + y.$$

Înscriind pe bandă reprezentările $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ separate printr-un blanc (adică prin $B$), vom cere maşinii să furnizeze pe $x + y$, ţinînd seamă că $x + y = \langle\overline{x}\rangle + \langle\overline{y}\rangle - 2$. O soluţie a problemei este dată de $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ şi $\Lambda$, alcătuită din următoarele cvadruplete: $q_1 1 B q_1$, $q_1 B D q_2$, $q_2 1 D q_2$, $q_2 B D q_3$, $q_3 1 B q_3$. Primul cvadruplet are ca efect ştergerea unei unităţi din $\overline{x}$; următoarele trei cvadruplete au

:a efect deplasarea benzii pînă la prima unitate din $\bar{y}$, iar ıltimul cvadruplet determină ştergerea primei unităţi din $\bar{y}$ şi oprirea maşinii, deoarece situaţia $q_3B$ nu constituie :uplul iniţial al nici unui cvadruplet. Însă în acest moment banda conţine $x + y$ unităţi. Fie deci

$$\alpha_1 = q_1(\overline{m_1, \ m_2}) = q_1\bar{m}_1B\bar{m}_2.$$

$$\text{Avem: } \alpha_1 = q_1 1\overset{m_1}{1}\, B\, 1\overset{m_2}{1} \rightarrow q_1 B 1\overset{m_1}{1}\, B 1\overset{m_2}{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow Bq_2\, \overset{m_1}{1}\, B 1\overset{m_2}{1} \rightarrow \cdots \rightarrow B\overset{m_1}{1}\, q_2 B\, 1\overset{m_2}{1} \rightarrow B\overset{m_1}{1} Bq_3 1\overset{m_2}{1} \rightarrow$$

$\rightarrow B\overset{m_1}{1} Bq_3 B\overset{m_2}{1}$, ultima descriere instantanee fiind terminală în raport cu $Z$. Aşadar, $\psi_Z^{(2)}(m_1, m_2) = < \text{Rez}_Z(\alpha_1) > =$

$$= < B1^{m_1}Bq_3B1^{m_2} > = m_1 + m_2.$$

Să dăm acum două exemple mai simple de funcţie calculabilă în sensul lui Turing.

Fie *funcţia succesor* $S(x) = x + 1$. Vom alege o maşină pentru care $q_1\bar{m}$ este o descriere terminală, oricare ar fi $m$. De exemplu, fie $Z = <\mathbb{S}, Q, D, S, \Lambda>$, unde $\mathbb{S} = \{B, 1\}$, $Q = \{q_1\}$, iar $\Lambda$ este alcătuită din unicul cvadruplet $q_1BBq_1$. Se observă că avem $\psi_Z^{(1)}(m) = <q_1\bar{m}> = m + 1$.

Fie acum *funcţia identică* $I(x) = x$. Această funcţie poate fi calculată cu următoarea maşină Turing: $Z = <\mathbb{S}, Q, D, S, \Lambda>$, unde $\mathbb{S} = \{B, 1\}$, $Q = \{q_1\}$, iar $\Lambda$ este alcătuită din unicul cvadruplet $q_11Bq_1$. Într-adevăr, avem

$$q_1\bar{n} = q_1\, 11^n \rightarrow q_1B1^n, \text{ deci } \psi_Z^{(1)}(n) = <q_1B1^n> = n.$$

Unele funcţii destul de simple necesită pentru a fi calculate, o maşină Turing destul de complicată. Aşa se întîmplă, de exemplu, cu funcţia $f(x, y) = x - y$. Această funcţie este definită doar pe o parte a lui $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$, anume în punctele $(x, y)$ pentru care $x \geqslant y$. Deci nu se pune problema de a arăta că funcţia este calculabilă, ci doar de a arăta că ea este

parţial calculabilă în sensul lui Turing. În construirea unei maşini corespunzătoare ne vom călăuzi după următoarea idee: înscriind pe bandă reprezentările $\bar{x}$ şi $\bar{y}$, separate printr-un blanc, maşina va trebui ca, la fiecare etapă să şteargă unitatea situată la extremitatea din stînga a lui $x$, precum şi unitatea situată la extremitatea din dreapta a lui $y$. Vom defini deci maşina $Z = <\mathbb{S}, Q, D, S, \Lambda>$, unde $\mathbb{S} = \{B, 1\}$, $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}$ iar $\Lambda$ este alcătuită din următoarele 17 cvadruplete:

$q_1 1Bq_1$, $q_1BDq_2$, $q_2 1Dq_2$, $q_2BDq_3$, $q_3 1Dq_3$, $q_3BSq_4$, $q_4 1Bq_4$, $q_4BSq_5$, $q_5 1Sq_6$, $q_6 1Sq_6$, $q_6BSq_7$, $q_7 1Sq_8$, $q_7BDq_9$, $q_8 1Sq_8$, $q_8BDq_1$, $q_9BDq_9$, $q_9 1Sq_9$.

Pentru a arăta că $\psi_Z^{(2)}(m_1, m_2) = m_1 \dot{-} m_2$, plecăm de la descrierea instantanee $\alpha_1 = q_n(\overline{m_1, m_2}) = q_1\overline{m}_1B\overline{m}_2$ şi, presupunînd că $m_1 \geqslant m_2$, punem $k = m_1 - m_2$. Avem:

$$\alpha_1 = q_1\, 1^{m_1+1}\, B1^{m_2+1} = q_1 1 1^{m_2} 1^k B 1^{m_2} 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow q_1 B 1^{m_2}\, 1^k\, B_1^{m_2} 1 \rightarrow B q_2 1^{m_2} \rightarrow\ B q_2 1^{m_2}\, 1^k\, B 1^{m_2} 1 \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\cdots \rightarrow\ B1^{m_2} 1^k q_2 B 1^{m_2} 1 \rightarrow B1^{m_2}\, 1^k B q_3 1^{m_2} 1 \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$B1^{m_2}\, 1^k B 1^{m_2} q_3 B \rightarrow B 1^{m_2} 1^k B 1^{m_2} q_4\, 1B \rightarrow B1^{m_2} 1^k\, B1^{m_2} q_4 BB \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow\ B1^{m_2} 1^k B q_6 1^{m_2} BB \rightarrow B1^{m_2}\, 1^k q_6\, B1^{m_2}\, BB \rightarrow \cdots$$

$$\rightarrow q_8 B 1^{m_2} 1^k B 1^{m_2} BB \rightarrow Bq_1\, 1^m\ \ 1^k\, B1^{m_2}\, BB\ = \alpha_s.$$

Exceptînd un $B$ iniţial şi $B$ final, $\alpha_s$ este o descriere instantanee de acelaşi tip cu $\alpha_1$, dar cu o pereche de unităţi mai puţin. Procesul este acum repetat. Eventual,

$$\alpha_1 \rightarrow \cdots\ \alpha_s \rightarrow \cdots \rightarrow \ldots \rightarrow B^{m_2} q_1\, 1 1^k B 1 B^{m_2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow$$

$$\rightarrow B^{m_2+1}\, 1^k q_2 B 1 B^{m_2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow B^{m_2+1}\, 1^k B q_4\, 1 B^{m_2+1} \rightarrow$$

$$B^{m_2+1}\, 1^k B q_4\ B B^{m_2+1} \rightarrow B^{m_2+1}\, 1^k q_5\, BBB^{m_2+1} = \alpha_p,$$

unde $\alpha_p$ este o descriere instantanee terminală. Însă $<\alpha_p> = k = m_1 - m_2$, deci pentru $m_1 \geqslant m_2$,

$$\psi_Z^{(2)}(m_1, m_2) = m_1 - m_2.$$

Însă aceasta nu este suficient pentru a decide că mașina $Z$ considerată calculează funcția $f$. Mai trebuie arătat că pentru $m_1 < m_2$ funcția $\psi_Z^{(2)}$ nu este definită în punctul $(m_1, m_2)$. În acest scop, să punem $k = m_2 - m_1$. Avem:

$$\alpha_1 = q_1 1^{m_1+1} B 1^{m_2+1} = q_1 1 1^{m_1} B 1^k 1^{m_1} 1 \to \cdots \to$$

$$B q_1 1^m B 1^k 1^{m_1} BB \to \cdots \to \cdots \to B^{m_1} q_1 1 B 1^k 1 B^{m_1+1} \to$$

$$\to B^{m_1} q_1 BB 1^k 1 B^{m_1+1} \to B^{m_1} B q_2 B 1^k 1 B^{m_1+1} \to$$

$$\to B^{m_1} BB q_3 1^k 1 B^{m_1+1} \to \cdots \to B^{m_1} BB 1^k q_4 1 B^{m_1+1} \to$$

$$\to B^{m_1} BB 1^k q_4 B B^{m_1+1} \to \cdots \to B^{m_1} B q_6 B 1^k B B^{m_1+1} \to$$

$$\to B^{m_1} q_7 BB 1^k B B^{m_1+1} \to B^{m_1} B q_9 B 1^k B B^{m_1+1} = \alpha_r \to$$

$$\to B^{m_1} BB q_9 1^k B B^{m_1+1} \to B^{m_1} B q_9 B 1^k B B^{m_1+1} \to \cdots.$$

Ultimele două descrieri instantanee sînt transformate, succesiv, una în cealaltă în mod indefinit, deci activitatea mașinii se perpetuează, fără să se ajungă la o descriere instantanee terminală. Rezultată că pentru $m_1 < m_2$, $\psi_Z^{(2)}(m_1, m_2)$ nu este definită. Deci

$$\psi_Z^{(2)}(x, y) = f(x, y) = x - y$$

și funcția $f$ este parțial calculabilă în sensul lui Turing.

Am văzut că funcții dintre cele mai simple nu pot fi calculate decît cu ajutorul unor mașini Turing destul de complicate. Pentru a evita construirea directă a unor astfel de mașini, se utilizează diverse tehnici de compunere a unor mașini elementare standardizate. O mașină Turing este, prin definiție, *o mașină standardizată*, dacă este prevăzută cu *o stare finală* $q_\theta$ cu următoarele două proprietăți: 1) mașina $Z$ se găsește la sfîrșitul oricărui calcul pe care-l efectuează în starea $q_\theta$ ; 2) nici o situație a lui $Z$ nu comportă starea $q_\theta$. Este comod ca $\theta$ să fie cel mai mare dintre indicii care servesc la numerotarea stărilor mașinii $Z$.

Procesul de standardizare a mașinilor Turing permite ca rezultatele (ieșirile) unei mașini să devină intrările (datele inițiale) ale altei mașini. Aceasta face posibilă o anumită operație de compunere a mașinilor Turing stan-

dardizate, operaţie care la rîndul ei permite stabilirea unor teoreme importante relative la operaţii cu funcţii calculabile. Două operaţii cu astfel de funcţii sînt cu deosebire importante:

a. *Operaţia de compunere*. Fie $g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n)$ funcţii cu valori numere naturale, fiecare funcţie $g_i$ fiind definită pe o parte $D_i$ a lui $\mathcal{N}^n$. Fie $f$ o funcţie cu valori naturale, definită pe o parte $D$ a lui $\mathcal{N}^m$. Numim compunere a funcţiilor $g_1, \ldots g_m$ şi $f$ funcţia $h$ dată de expresia

$$h(y_1, \ldots, y_n) = f[g_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_n)],$$

definită pe o parte a mulţimii

$$\bigcap_{i=1}^{m} D_i.$$

Folosind maşini Turing standardizate, se poate arăta că dacă $f, g_1 \ldots, g_m$ sînt parţial calculabile (respectiv calculabile), atunci $h$ este de asemenea parţial calculabilă (respectiv calculabilă) în sensul lui Turing. Cu alte cuvinte, clasa funcţiilor parţial calculabile este închisă în raport cu operaţia de compunere.

b. *Operaţia de minimizare*. Fie funcţia $f(y, x_1, \ldots, x_n)$, definită în fiecare punct din $\mathcal{N}^{n+1}$ şi avînd valori naturale. Acestei funcţii îi asociem funcţia $h(x_1, \ldots, x_n)$, a cărei valoare (dacă există) este, prin definiţie, cea mai mică valoare (dacă există) a lui $y$, pentru care $f(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Rezultă că funcţia $h$ este definită, în general, doar pe o parte a produsului cartezian $\mathcal{N}^n$. În cazul în care funcţia $h(x_1, \ldots, x_n)$ asociată lui $f$ este definită în fiecare punct din $\mathcal{N}^n$, spunem că $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ este *regulată* (pentru $y$). Cu ajutorul maşinilor Turing standardizate, folosind o maşină care calculează succesiv pe $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ pentru $y = 0$, $y = 1$, $y = 2, \ldots$, pînă cînd se obţine $f(y, x_1, \ldots x_n) = 0$, se ajunge la următorul rezultat: dacă $f(y, x_1, \ldots, x_n)$ este parţial calculabilă, atunci funcţia $h$, asociată lui $f$ prin minimizare, este parţial calculabilă. Dacă, în plus, $f$ este regulată, funcţia $h$ este calculabilă în sensul lui Turing.

Acum putem defini o clasă de funcţii deosebit de importantă în logica matematică, aceea a funcţiilor parţial recursive. Există diferite moduri de introducere a acestor funcţii (S.C. Kleene, Rosza Peter etc.), dar cel mai apropiat de teoria maşinilor Turing şi de noţiunile studiate mai sus este datorit lui J. Robinson. Vom adopta aici prezentarea acestui din urmă autor.

O funcţie definită pe o parte a lui $\mathcal{N}^n$ cu valori naturale este numită *funcţie parţial recursivă*, dacă ea se poate obţine prin aplicarea de un număr finit de ori a operaţiilor de compunere şi de minimizare, pornind de la următoarele funcţii de bază:

(1) funcţia succesor $S(x) = x + 1$;
(2) funcţia de proiecţie $U_i^n(x_1,\ldots,x_n) = x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$;
(3) funcţia de adunare $x + y$;
(4) funcţia de scădere cu prelungire trivială
$$x - y = \begin{cases} x - y, \text{ dacă } x \geqslant y; \\ 0, \text{ dacă } x < y; \end{cases}$$
(5) funcţia produs $xy$.

Despre funcţiile (1) şi (3) s-a arătat deja că sînt calculabile în sensul lui Turing. Din faptul că, aşa cum s-a arătat, funcţia de scădere $x - y$ este calculabilă, rezultă fără dificultate că şi funcţia de scădere cu prelungire trivială este calculabilă Turing. Se poate arăta că şi funcţiile (2) şi (5) sînt calculabile Turing. Deoarece operaţiile de compunere şi minimizare, aplicate unor funcţii calculabile Turing, conduc tot la funcţii calculabile Turing, rezultă următoarea teoremă deosebit de importantă:

*Orice funcţie parţial recursivă este parţial calculabilă în sensul lui Turing.*

Se poate arăta că şi reciproca acestei teoreme este adevărată; cu alte cuvinte, clasa funcţiilor parţial recursive coincide cu clasa funcţiilor calculabile în sensul lui Turing.

O funcţie parţial recursivă este, prin definiţie, o *funcţie recursivă*, dacă operaţiile care o definesc se aplică exclusiv unor funcţii regulate. Se poate arăta că există identitate între clasa funcţiilor recursive şi clasa funcţiilor calculabile în sensul lui Turing.

Ținînd seamă că noțiunea de algoritm normal este echivalentă cu aceea de funcție parțial calculabilă în sensul lui Turing, rezultă că dispunem de trei variante echivalente pentru conceptul de calculabilitate. Acestea nu sînt singurele, dar sînt, în orice caz, cele mai importante. Pe una sau alta dintre aceste variante se poate funda analiza matematică a funcțiilor constructive, și unele idei în această privință au fost deja schițate într-un paragraf precedent.

# II

## Toate tipurile de trecere la limită admit o schemă comună

### INTRODUCERE

Procesul de trecere la limită apare în matematică sub formele cele mai variate. De la forma rudimentară pe care o prezintă noțiunea de „șir convergent“, pînă la forma mult mai complexă pe care o prezintă ideea de integrală există un mare număr de nuanțe, de diverse grade de complexitate ale unui același proces: trecerea la limită. Pe de altă parte dat fiind că de obicei procesele infinite care apar în matematică oglindesc un conținut intuitiv care ne este familiar, se întîmplă de multe ori să ne lăsăm furați de acest aspect intuitiv și să utilizăm operații de trecere la limită într-o formă care nu are drept de cetate în matematică; într-o formă în care nu se înțelege bine despre ce este vorba, deci care lasă de dorit din punctul de vedere al rigorii.

În acest capitol ne propunem să arătăm că toate tipurile de trecere la limită pe care le întîlnim în matematică, oricît de diferite ar putea ele să pară, pot fi prezentate dintr-un punct de vedere unic, deci ca aspecte ale unui același proces. Faptul acesta nu a fost cunoscut de către vechii analiști, el este o cucerire a secolului nostru. Acel proces unic care conține drept cazuri particulare toate variantele posibile de trecere la limită, poate fi ales în două feluri. Noi vom expune aici o metodă care se sprijină pe o noțiune introdusă în matematică în urmă cu vreo treizeci de ani, de către *Henri Cartan*, noțiunea de filtru. Celălalt mod de tratare a proceselor de trecere la limită se găsește expus în tratatul de *Analiză matematică* al acad. Miron Nicolescu. A se vedea, în special, volumul

al doilea al acestui tratat. (Editura Tehnică, București, 1958).

Iată, mai întîi, o listă (incompletă) de procese la limită:

limita unui șir;
marginea superioară sau inferioară a unei mulțimi liniare;
limita superioară sau inferioară a unei funcții definite pe o mulțime;
marginea superioară sau inferioară a unei funcții într-un punct;
limita superioară sau inferioară a unei funcții într-un punct;
limita unei funcții într-un punct;
limita superioară sau inferioară a unui șir;
variația totală a unei funcții pe un interval;
oscilația totală a unei funcții pe un interval;
integralele Darboux ale unei funcții pe un interval.

Noțiunea de filtru, pe care o vom expune imediat, are un caracter foarte abstract. În aparență, n-are nici o legătură cu procesele la limită înșirate mai sus. Expunerea definiției și proprietăților acestei noțiuni este destul de aridă. Această ariditate însă (care nu se va prelungi mult) va fi pe deplin compensată de satisfacția pe care o vom avea cînd vom constata că noțiunea nou introdusă lămurește esența tuturor proceselor infinite pe care le-am întîlnit pînă acum în analiză. Să trecem la definirea ei.

## CE ESTE UN FILTRU?

Fie $E$ o mulțime nevidă de elemente de natură nespecificată. Fie $\mathcal{F}$ o mulțime de părți ale lui $E$, avînd următoarele proprietăți:

$F_1$) dacă $M \in \mathcal{F}$, iar $M \subset N \subset E$, atunci $N \in \mathcal{F}$;
$F_2$) dacă $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{F}$, atunci $M \cap N \in \mathcal{F}$;
$F_3$) partea vidă a lui $E$ nu aparține lui $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ se numește un filtru asupra lui $E$.

Iată un exemplu de filtru: mulțimea tuturor părților dreptei care conține un același punct $x$ este un filtru asupra lui $R^1$. În adevăr, dacă o parte a dreptei conține pe $x$,

atunci orice parte mai cuprinzătoare conţine de asemenea pe $x$. Intersecţia a două părţi care conţin pe $x$ este o parte care conţine pe $x$. În sfîrşit, partea vidă a dreptei nu conţine pe $x$.

Mulţimile acestui filtru sînt, într-un limbaj familiar, vecinătăţile punctului $x$. Este suficient să ţinem seama de importanţa vecinătăţilor în definiţia noţiunii de limită, pentru ca să începem să bănuim legătura dintre filtre şi limite.

Vom da acum cîteva noţiuni ajutătoare şi unele proprietăţi ale filtrelor.

Un filtru $\mathcal{F}'$ este mai fin decît un filtru $\mathcal{F}$ asupra aceleiaşi mulţimi $E$, dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

O mulţime $\mathcal{B}$ de părţi ale lui $E$ este o bază de filtru, dacă satisface următoarele condiţii:

$B_1$) dacă $B' \in \mathcal{B}$, $B'' \in \mathcal{B}$, atunci există $B \in \mathcal{B}$, aşa încît $B \subset B' \cap B''$;

$B_2$) $\mathcal{B}$ nu este vidă;

$B_3$) $\mathcal{B}$ nu conţine partea vidă a lui $E$.

Pentru a explica această definiţie, să demonstrăm.

T e o r e m a 1. *Mulţimea $\mathcal{F}$, compusă din toate părţile lui $E$ care conţin, fiecare, o mulţime a lui $\mathcal{B}$, este un filtru asupra lui $E$.*

Într-adevăr, orice parte $A$ a lui $E$ care conţine o mulţime $F$ a lui $\mathcal{F}$ conţine, prin definiţie, o mulţime $B \subset F$ a lui $\mathcal{B}$, deci aparţine lui $\mathcal{F}$ şi, prin urmare, $\mathcal{F}$ satisface $F_1$.

Intersecţia $F \cap F'$ a două mulţimi ale lui $\mathcal{F}$ conţine intersecţia $B \cap B'$ a mulţimilor $B \subset F$, $B' \subset F'$ ale lui $\mathcal{B}$; însă conform condiţiei $B_1$, $B \cap B'$ conţine o mulţime $B'' \in \mathcal{B}$, deci $B'' \subset F \cap F'$ şi, prin urmare, $F \cap F' \in \mathcal{F}$. Este satisfăcută deci $F_2$.

În sfîrşit, $\mathcal{F}$ nu conţine partea vidă a lui $E$, deoarece $\mathcal{B}$ nu conţine această mulţime, deci $\mathcal{F}$ satisface $F_3$.

$\mathcal{F}$ este deci un filtru asupra lui $E$; se numeşte filtru generat de baza $\mathcal{B}$.

Două baze de filtru $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ sînt echivalente dacă generează acelaşi filtru.

T e o r e m a 2. *Pentru ca un filtru $\mathcal{F}'$ de bază $\mathcal{B}'$ să fie mai fin decît un filtru $\mathcal{F}$ de bază $\mathcal{B}$, este necesar şi suficient ca fiecare mulţime $B$ a lui $\mathcal{B}$ să conţină o mulţime $B' \in \mathcal{B}'$.*

*Demonstrație*. Într-adevăr, dacă $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, atunci fiecare mulțime $F$ a lui $\mathcal{F}$ aparține lui $\mathcal{F}'$. În particular fiecare mulțime $B$ a lui $\mathcal{B}$ aparține lui $\mathcal{F}'$, deoarece $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, deci $\mathcal{B}$ conține o mulțime $B' \in \mathcal{B}'$.

Reciproc, dacă fiecare mulțime $B$ a lui $\mathcal{B}$ conține o mulțime $B'$ a lui $\mathcal{B}'$, atunci $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}'$, deci, în virtutea lui $F_2$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

Fie în $R^n$ mulțimea $S_r(x)$ a punctelor $y$ situate la o distanță inferioară lui $r$ de punctul $x$ $(r > 0)$.

Mulțimea $\mathbb{S}(x)$ a tuturor sferelor cu centrul în $x$ constituie o bază de filtru. În adevăr, intersecția a două sfere $S_r(x)$ și $S_{r'}(x)$ de centru $x$ și de raze $r$ și $r'$ este sfera cu raza cea mai mică, deci $\mathbb{S}(x)$ satisface $B_1$.

$\mathbb{S}(x)$ nu este vidă și nu conține partea vidă din $R^n$ (deoarece $r > 0$), deci $\mathbb{S}(x)$ satisface $B_2$ și $B_3$.

Filtrul $\mathcal{V}(x)$ de bază $\mathbb{S}(x)$, adică mulțimea tuturor părților lui $R^n$ care conțin fiecare o sferă $S_r(x)$, poartă numele de filtrul vecinătăților punctului $x$; fiecare dintre mulțimile $V(x)$ ale lui $\mathcal{V}(x)$ se numește vecinătate a lui $x$.

Orice bază a filtrului vecinătăților poartă numele de sistem fundamental de vecinătăți, iar mulțimile bazei numele de vecinătăți fundamentale: în particular, sferele $S_r(x)$ sînt vecinătăți fundamentale ale lui $x$. În plan, așa-numitele sfere se confundă cu discurile centrate în $x$. Pe dreaptă, sferele se confundă cu intervalele centrate în $x$.

Un filtru $\mathcal{F}$ asupra spațiului $R^n$ se spune că are drept limită (converge către) un punct $x$, dacă $\mathcal{F}$ este mai fin decît filtrul $\mathcal{V}(x)$ al vecinătăților lui $x$.

O bază de filtru $\mathcal{B}$ are ca limită (converge către) un punct $x$, dacă filtrul $\mathcal{F}$ de bază $\mathcal{B}$ converge către $x$.

T e o r e m a 3. *Condiția necesară și suficientă ca o bază de filtru $\mathcal{B}$ să conveargă către $x$ este ca fiecare vecinătate fundamentală a unui sistem fundamental oarecare de vecinătăți ale lui $x$ să conțină o mulțime a lui $\mathcal{B}$.*

*Demonstrație*. Dacă $\mathcal{B}$ satisface aceste condiții, atunci, în virtutea teoremei 2, filtrul $\mathcal{F}$ de bază $\mathcal{B}$ este mai fin decît filtrul $\mathcal{V}(x)$ al vecinătăților lui $x$. Reciproc, dacă $\mathcal{F} \supset \mathcal{V}(x)$, atunci, în virtutea aceleiași teoreme 2, fiecare vecinătate fundamentală a lui $x$ conține o mulțime a lui $\mathcal{B}$.

T e o r e m a 4. *În spațiul* $R^n$ *orice filtru convergent are o limită unică.*

În adevăr, în caz contrar, un filtru $\mathcal{F}$ ar tinde cel puțin către două puncte distincte $x$ și $y$, deci $\mathcal{F} \supset \mathcal{V}(x), \mathcal{F} \supset \mathcal{V}(y)$.

Fie sferele $S_r(x)$ și $S_r(y)$. Avem $S_r(x) \in \mathcal{V}(x)$, $S_r(y) \in \mathcal{V}(y)$

Fie $d$ distanța dintre $x$ și $y$ și fie $2r < d$. Rezultă $S_r(x) \cap S_r(y) = 0$. Ținînd seama că aceste două sfere aparțin filtrului $\mathcal{F}$, am ajuns la o contradicție care demonstrează teorema.

Vom arăta acum că toate procesele infinite pe care le-am întîlnit și pe care le-am amintit la începutul acestui capitol pot fi reduse la o singură idee: aceea de convergență a unui anumit filtru.

## MARGINEA SUPERIOARĂ A UNEI MULȚIMI LINIARE DE PUNCTE

Fie o mulțime $\mathcal{E}$ liniară, nevidă. Pentru fiecare $x \in \mathcal{E}$ considerăm partea $A_x \subset \mathcal{E}$ definită astfel: $x' \in A_x$ dacă și numai dacă $x' \in E$ și $x' \geqslant x$. Mulțimea părților $\{A_x\}$ cînd $x$ parcurge pe $\mathcal{E}$ formează o bază de filtru $\mathcal{B}$; în adevăr, 1) $A_x \cap A_y$ conține orice $A_z$ cu $z \in \mathcal{E}$; $z \geqslant \max(x, y)$; 2) $\mathcal{B}$ nu este vidă, deoarece $\mathcal{E}$ nu este vidă; există $x \in \mathcal{E}$, deci există $A_x \in \mathcal{B}$; 3) $\mathcal{B}$ nu conține partea vidă a lui $\mathcal{E}$, deoarece orice $A_x$ conține cel puțin un element: pe $x$.

Fie $\mathcal{F}$ filtrul asupra lui $R^1$, care are ca bază pe $\mathcal{B}$. Avem:

T e o r e m ă. *Necesar și suficient ca M să fie marginea superioară a lui* $\mathcal{E}$ *este ca*

$$\lim \mathcal{F} = M.$$

*Demonstrație.* Vom presupune că $\mathcal{E}$ este mărginită superior.

Necesitatea. Fie $M$ marginea superioară a lui $\mathcal{E}$. Fie o vecinătate fundamentală a lui $M$: $(M - \varepsilon, \ M + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Conform definiției lui $M$, există $x \in \mathcal{E}$, astfel încît $M - \varepsilon < x$ și avem, în orice caz, $x \leqslant M$; deci $A_x \subset (M - \varepsilon, \ M + \varepsilon)$.

De aici rezultă imediat că $\mathcal{F}$ este mai fin ca $\mathcal{V}(M)$, conform teoremei 3.

Suficienţa. Fie $\lim \mathcal{F} = M$. Fie $\varepsilon > 0$ şi fie intervalul (vecinătatea fundamentală) $M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. Există $x \in \mathcal{G}$, astfel încît $A_x \subset (M - \varepsilon, \ M + \varepsilon)$ (conform teoremei 3). Însă $A_x$ conţine toate punctele din $\mathcal{G}$ situate la dreapta lui $x$, deci $x \in \mathcal{G} \rightarrow x < M + \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon$ a fost ales arbitrar, rezultă că $x \in \mathcal{G} \rightarrow \ x \leqslant M$.

Pe de altă parte, din $A_x \subset (M - \varepsilon, \ M + \varepsilon)$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x \in E$, astfel încît $M - \varepsilon < x$. $M$ este, deci, marginea superioară a lui $\mathcal{G}$.

Observaţia 1. Teorema se extinde şi la cazul în care $M = \infty$.

Observaţia 2. O teoremă analogă se poate da pentru marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{G}$.

## LIMITA SUPERIOARĂ A UNEI MULŢIMI LINIARE INFINITE

Fie $\mathcal{G}^*$ submulţimea acelor puncte din $\mathcal{G}$ la dreapta cărora există o infinitate de puncte din $\mathcal{G}$. Presupunem, deocamdată, că $\mathcal{G}^*$ nu e vidă. Fie, pentru $x \in G^*$, $A_x^*$ formată din toate punctele $x' \in \mathcal{G}$ cu $x' > x$.

Mulţimea $\mathcal{B}^*$ a părţilor $A_x^*$ ale lui $\mathcal{G}$ formează o bază de filtru. Într-adevăr, $A_x^* \cap A_y^*$ conţine pe $A_z^*$ cu $z = \max(x, y)$; $\mathcal{B}^*$ nu este vidă, deoarece $\mathcal{G}^*$ nu este vidă; $\mathcal{B}^*$ nu conţine partea vidă a lui $\mathcal{G}$, deoarece pentru orice $x \in \mathcal{G}^*$, $A_x^*$ nu este vidă (este chiar infinită).

Fie $F^*$ filtrul de bază $\mathcal{B}^*$ Printr-un raţionament analog cu cel precedent, se constată că

$$\lim \mathcal{F}^* = L,$$

unde $L$ este limita superioară a lui $\mathcal{G}$.

Dacă $\mathcal{G}^*$ este vidă, atunci considerăm submulţimea $^*\mathcal{G}$ a acelor puncte din $\mathcal{G}$ la stînga cărora există o infinitate de puncte din $\mathcal{G}$ ($^*\mathcal{G}$ va coincide, în acest caz, cu $\mathcal{G}$) şi obţinem un filtru $^*\mathcal{F}$ cu

$$\lim {}^*\mathcal{F} = L = l,$$

unde $l$ este limita inferioară a lui $\mathcal{G}$.

## MARGINEA SUPERIOARĂ A UNEI FUNCȚII DEFINITE PE O MULȚIME DIN $R^n$

Pentru fiecare $x \in \mathcal{G}$ considerăm mulțimea $A_x$ a tuturor punctelor $x' \in \mathcal{G}$, pentru care $f(x') \geqslant f(x)$.

Mulțimea $\mathcal{B}$ a părților $A_x$ ale lui $\mathcal{G}$ este o bază de filtru asupra lui $\mathcal{G}$. Într-adevăr, $A_x \cap A_y \supset A_z$, unde $z \in \mathcal{G}$ și $f(z) \geqslant \max\ (f(x), f(y))$. $\mathcal{B}$ nu este vidă, deoarece $\mathcal{G}$ nu este vidă; $\mathcal{B}$ nu conține partea vidă a lui $\mathcal{G}$, deoarece, pentru orice $x \in \mathcal{G}$, $A_x$ conține cel puțin elementul $x$.

Fie $\mathcal{F}$ filtrul asupra lui $\mathcal{G}$, generat de $\mathcal{B}$.

T e o r e m ă. *Necesar și suficient ca M să fie marginea superioară a lui f pe $\mathcal{G}$ este ca*

$$M = \lim_{\mathcal{F}} f.$$

Să presupunem că $M$ este finit.

Necesitatea. Fie $M$ marginea superioară a lui $f$ pe $\mathcal{G}$. Avem deci

$$x \in \mathcal{G} \rightarrow f(x) \leqslant M$$

și pentru $\varepsilon > 0$ există $x \in \mathcal{G}$, așa încît $M - \varepsilon < f(x)$.

Cu alte cuvinte, pentru orice vecinătate fundamentală $(M - \varepsilon,\ M + \varepsilon)$ a lui $M$ există $x \in \mathcal{G}$, astfel încît

$$f\{A_x\} \subset (M - \varepsilon,\ M + \varepsilon).$$

Însă $f\{A_x\}$ aparține bazei de filtru $f(\mathcal{F})$ asupra lui $R^1$. Deci conform teoremei 3, $f(\mathcal{F})$ converge către $M$.

Suficiența. Fie $N = \lim_{\mathcal{F}} f$. Dacă

$$\sup f(x) = M \neq N,$$

atunci, conform demonstrației precedente, $\lim_{\mathcal{F}} f = N$. Însă aceasta ar contrazice teorema 4 asupra unicității limitei unui filtru asupra lui $R^n$.

Observația 1. Teorema rămîne în vigoare, cu mici modificări în demonstrație, în cazul $M = +\infty$.

Observația 2. O teoremă analogă se obține pentru marginea inferioară a lui $f$ pe $\mathcal{G}$; $A_x$ se înlocuiește cu $A'_x$ conținînd toate punctele $x' \in \mathcal{G}$ pentru care $f(x') \leqslant f(x)$.

Fie $f(x)$ local mărginită superior[1] ($x \in R^1$). Fie $x_0 \in R^1$. Prin definiţie:

$$M(x_0) = \sup (f; x_0) = \inf (\sup \{ f; I_x \},$$

unde $I_x = [2x_0 - x, x]$.

Introducem funcţia $\mu$ definită pe $R^1$ în modul următor:

$$\mu(x) = \mu(2x_0 - x) = \sup (f; I_x).$$

Din definiţia marginii superioare în $x_0$, rezultă că

$$M(x_0) = \inf_{x \in R^1} \mu(x).$$

Mulţimile $A'_x$ (vezi observaţia 2 de mai sus) sînt aici chiar intervalele închise $I_x$. Baza de vecinătăţi formată de intervalele închise $I_x$ generează un filtru $\mathcal{F}$ asupra lui $R^1$. (De observat că acest filtru este mai fin ca $\mathcal{V}(x_0)$; dacă, însă, am fi definit funcţia $\mu$ numai pentru $x \neq x_0$, am fi obţinut $\mathcal{F} = \mathcal{V}(x_0)$.) Avem

$$\lim_{\mathcal{F}} \mu = M(x_0)$$

şi, conform observaţiei din paranteză, avem chiar

$$\lim_{\mathcal{V}x_0} \mu = M(x_0).$$

Observaţia 1. Luînd

$$\mu^*(x) = \mu^*(2x_0 - x) = \inf (f; I_x),$$

obţinem

$$\lim_{\mathcal{F}} \mu^* = \lim_{\mathcal{V}x_0} \mu^* = m(x_0) \text{ (marg. inf. în } x_0).$$

Observaţia 2. Să presupunem că există $N$, astfel încît $\lim_{\mathcal{F}} \mu = N$. ($\mathcal{F}$ fiind filtrul definit mai sus). Conform teoremei de unicitate a limitei unui filtru în $R^n$, rezultă $N = M(x_0)$.

---

1 O funcţie $f$ este local mărginită superior, dacă pentru fiecare punct există o vecinătate în care $f$ este mărginită superior. Este vizibil că $f$ poate fi local mărginită superior, fără a fi mărginită superior, cum se întîmplă cu $f(x) = \frac{1}{x}$ în $(0, 1)$.

## LIMITA SUPERIOARĂ (RESPECTIV INFERIOARĂ) A UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f$ definită şi local mărginită pe $R$. (Condiţia mărginirii locale este cerută numai pentru a evita introducerea lui $-\infty$ şi $+\infty$).

Fie o funcţie $v$, definită pentru orice $x \neq x_0$ în modul următor:

$$v(x) = v(2x_0 - x) = \sup (f; I_x - \{x_0\}), \quad (I_x = [2x_0 - x, x]).$$

Deoarece, prin definiţie,

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = \inf_{x \neq x_0} (\sup [f; I_x - \{x_0\}]),$$

rezultă, ca şi mai sus, că

$$\lim_{\varphi x_0} v = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x).$$

Observaţia 1. O teoremă analogă se obţine pentru $\underline{\lim}_{x \to x_0} f(x)$, înlocuindu-se funcţia $v$ cu funcţia $v^*$, definită astfel:

$$v^*(x) = v^*(2x_0 - x) = \inf (f; I_x - \{x_0\}).$$

Observaţia 2. Unicitatea limitelor

$$\lim_{\varphi(x_0)} (x_0)\, v, \quad \lim_{\varphi(x_0)} v^*$$

rezultă din teorema de unicitate a limitei unui filtru asupra lui $R^n$.

## LIMITA UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

Fie $f$ definită în $R^1$, cu valori în $R^1$.

Teoremă. *O condiţie necesară şi suficientă ca să existe* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *este să se poată defini o funcţie* $\varphi$, *continuă în* $x_0$ *şi egală cu* $f(x)$ *pentru* $x \neq x_0$, *astfel încît să existe* $\lim_{\varphi(x_0)} \varphi$. Avem:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\varphi(x_0)} \varphi.$$

*Demonstrație.* Necesitatea. Presupunem că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$, astfel încît $x \in (x_0 - \eta_\varepsilon, x_0 + \eta_\varepsilon)$ să rezulte

$$\varphi(x) \in (A - \varepsilon, \quad A + \varepsilon)$$

sau

$$\varphi\{(x_0 - \eta_\varepsilon, \quad x_0 + \eta_\varepsilon)\} \subset (A - \varepsilon, \quad A + \varepsilon),$$

deci orice vecinătate fundamentală a lui $A$ conține o mulțime din baza de filtru $\varphi(\mathcal{V}(x_0))$, cu alte cuvinte, această bază de filtru converge către $A$.

Suficiența. Presupunem că $\varphi(\mathcal{B}) \to A$; deci, orice vecinătate fundamentală $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ conține o mulțime din $\varphi(\mathcal{V}(x_0))$, deci o mulțime din $\varphi(\mathcal{S}(x_0))$; există deci un $\eta > 0$, așa încît

$$\varphi(x_0 - \eta, \quad x_0 + \eta) \subset (A - \varepsilon, \quad A + \varepsilon),$$

ceea ce este echivalentă cu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

## LIMITA UNUI ȘIR

Fie un șir cu termeni reali, adică o funcție definită pe $\mathcal{N}$ (mulțimea numerelor naturale), cu valori în $R^1$. Vom nota această funcție cu $f$, iar valoarea lui $f$ în $n$ cu $f(n)$.

Fie $B_n = (n, n + 1, n + 2, ..)$. $B_n$ se numește o secțiune superioară în $\mathcal{N}$. Fie $\mathcal{B}$ mulțimea tuturor secțiunilor superioare ale lui $\mathcal{N}$. $\mathcal{B}$ constituie o bază de filtru asupra lui $\mathcal{N}$. În adevăr, $B_n \cap B_m \supset B_p$ cu $p \geqslant \max(m, n)$; $\mathcal{B}$ nu este vidă, căci $\mathcal{N}$ nu este vidă și fiecare $n \in \mathcal{N}$ determină un $B_n$; $\mathcal{B}$ nu conține partea vidă a lui $\mathcal{N}$, căci orice $B$ este diferit de mulțimea vidă. Fie $\mathcal{F}$ filtrul generat de $\mathcal{B}$ asupra lui $\mathcal{N}$. Avem

T e o r e m ă. *Necesar și suficient ca*

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A$$

*este ca*

$$\lim_{\mathcal{F}} f = A.$$

Necesitatea. Presupunem că

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A,$$

deci că pentru $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N_\varepsilon$, astfel încît

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow f(n) \in (A - \varepsilon, \quad A + \varepsilon).$$

Urmează că o vecinătate fundamentală $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ a lui $A$ conține mulțimea

$$f(B_{N_\varepsilon}) = (f(N_\varepsilon), \quad f(N_\varepsilon + 1), \quad f(N_\varepsilon + 2), \ldots),$$

care este un element din baza de filtru $f(\mathcal{B}) = \{f(B_n)\}$. Rezultă deci că baza de filtru $f(\mathcal{B})$ converge către $A$, deci că baza de filtru $f(\mathcal{F})$ converge către $A$ și avem

$$\lim_{\mathcal{F}} f = A.$$

Suficiența. Fie $\lim_{\mathcal{F}} f = A$; urmează că baza de filtru $f(\mathcal{F})$ converge către $A$, deci că orice vecinătate fundamentală $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ conține o mulțime din $f(\mathcal{F})$ și, cu atît mai mult, din $f(\mathcal{B})$; fie această mulțime $f(B_{N_\varepsilon})$. Din

$$f(B_{N_\varepsilon}) \subset (A - \varepsilon, \quad A + \varepsilon)$$

rezultă imediat

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A.$$

## LIMITA SUPERIOARĂ (RESPECTIV INFERIOARĂ) A UNUI ȘIR

Limita superioară a unui șir a fost definită ca marginea superioară a mulțimii valorilor care se obțin ca limite ale diferitelor subșiruri ale șirului dat[1].

---

[1] S-ar putea întîmpla ca această margine superioară să fie $+\infty$. Nu este greu de văzut că tot ceea ce urmează rămîne valabil și în acest caz. La nevoie, șirul $\mu(1), \mu(2), \ldots, \mu(n), \ldots$ Va deveni $+\infty, +\infty+, \ldots +\infty, \ldots$

Însă un şir este o funcţie $f$ definită pe $\mathcal{N}$, cu valori în $R^1$, deci ar trebui ca definiţia de mai sus să corespundă noţiunii de limită superioară a unei funcţii într-un punct. Faptul că acest punct este $+\infty$ nu schimbă esenţial situaţia. „Vecinătăţile" fundamentale ale lui $+\infty$ sînt, în mulţimea $\mathcal{N}$, secţiunile superioare $B_n$. Nu este greu de arătat că

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} f(n) = \inf_n (\sup \{f(n), f(n+1), \dots \}).$$

Introducînd funcţia auxiliară $\mu$, definită pe $\mathcal{N}$ prin

$$\mu(n) = \sup\{f(n), \quad f(n+1), \dots\} = \sup (f; B_n)$$

şi ţinînd seamă că şirul numeric

$$\mu(1), \quad \mu(2), \dots, \mu(n), \dots$$

este monoton descrescător, deci că are limită, rezultă:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(n).$$

Dar, după cum am văzut,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(n) = \lim_{\mathcal{F}} \mu,$$

unde $\mathcal{F}$ este filtrul asupra lui $\mathcal{N}$, generat de baza $\mathcal{B}$ a secţiunilor $\{B_n\}$. Urmează că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(n) = \lim_{\mathcal{F}} \mu.$$

În mod analog se poate arăta că

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f(n) = \lim_{\mathcal{F}} \nu$$

unde $\nu$ este o funcţie reală definită pe $\mathcal{N}$ în modul următor:

$$\nu(n) = \inf (f; B_n).$$

## VARIAȚIA TOTALĂ A UNEI FUNCȚII

Fie $f$ o funcție definită pe $[a, b]$. Să definim pe mulțimea $\mathbf{\Delta}$ a diviziunilor lui $[a, b]$ o funcție $v$ în felul următor: dacă $\Delta \in \mathbf{\Delta}$.

$$v(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

unde $\Delta = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$.

Să considerăm, pentru fiecare $\Delta \in \mathbf{\Delta}$, mulțimea $\mathcal{S}_\Delta$ a tuturor diviziunilor lui $[a, b]$ mai fine ca $\Delta$. $\mathcal{S}_\Delta$ se numește o secțiune la dreapta în $\mathbf{\Delta}$.

Mulțimea $\mathcal{S}$ a secțiunilor la dreapta în $\mathbf{\Delta}$ este o bază de filtru asupra lui $\mathbf{\Delta}$. În adevăr, $\mathcal{S}_{\Delta'} \cap \mathcal{S}_{\Delta''} \supset \mathcal{S}_\Delta$ dacă $\Delta \supset \Delta' \cup \Delta''$; $\mathcal{S}$ nu este vidă, deoarece fiecare diviziune a lui $[a, b]$ induce o secțiune la dreapta în $\mathbf{\Delta}$; $\mathcal{S}$ nu conține partea vidă a lui $\mathbf{\Delta}$, deoarece orice $\mathcal{S}_\Delta$ conține o infinitate de elemente din $\mathbf{\Delta}$.

Fie $\mathcal{F}$ filtrul asupra lui $\mathbf{\Delta}$, generat de $\mathcal{S}$. Avem

T e o r e m ă. *Necesar și suficient ca $f$ să fie cu variație mărginită pe $[a, b]$ este să existe și să fie finită limita*

$$\lim_{\mathcal{F}} v.$$

*Valoarea acestei limite este variația totală a lui $f$, de la $a$ la $b$.*

Necesitatea. Fie $V = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. Fie $\varepsilon > 0$. Există o diviziune $\Delta_\varepsilon$, astfel încît $V - \varepsilon < v(\Delta_\varepsilon)$. Fie acum $\Delta \supset \Delta_\varepsilon$. Avem, cu atît mai mult, $V - \varepsilon < v(\Delta)$. Deoarece avem și $v(\Delta) \leqslant V$, rezultă că orice vecinătate fundamentală a lui $V$ conține imaginea, prin funcția $v$, a unei secțiuni $\mathcal{S}_\Delta$. Deci baza de filtru $v(\mathcal{F})$ converge către $V$, adică

$$\lim_{\mathcal{F}} v = V.$$

Suficiența. Din $\lim_{\mathcal{F}} v = V$ rezultă că $(V - \varepsilon, V + \varepsilon)$ conține o mulțime din baza de filtru $v(\mathcal{F})$, deci și o mulțime din $v(\mathcal{S})$, adică imaginea prin $v$ a unei anumite secțiuni $\mathcal{S}_{\Delta_\varepsilon}$. Pentru orice $\Delta \supset \Delta_\varepsilon$ avem

$$V - \varepsilon < v(\Delta) < V + \varepsilon.$$

De aici rezultă că

$$V \leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Fie acum o diviziune arbitrară $\Delta$ şi fie $\Delta_1 = \Delta_\varepsilon \cup \Delta$. Din $\Delta_1 \supset \Delta_\varepsilon$ rezultă

$$v(\Delta_1) < V + \varepsilon,$$

deci, cu atît mai mult,

$$v(\Delta) < V + \varepsilon.$$

(Se foloseşte proprietatea că $v(\Delta)$ nu descreşte cînd se trece la o diviziune mai fină).

Deoarece $\varepsilon$ este un număr pozitiv arbitrar, iar $\Delta$ este un element arbitrar din $\mathbf{\Delta}$, rezultă că pentru orice $\Delta$

$$v(\Delta) \leqslant V,$$

deci că $f$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Avem:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant V.$$

Deoarece am obţinut şi o inegalitate de sens contrar avem

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = V.$$

Observaţia 1. Funcţia $v$ poate fi înlocuită cu funcţia $\omega$, definită în felul următor: dacă $\Delta \in \mathbf{\Delta}$.

$$\omega(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f; [x_i, x_{i+1}]).$$

Observaţia 2. Să considerăm, pentru fiecare $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ mulţimea $\mathcal{S}_\Delta^*$ a diviziunilor de normă $\leqslant \|\Delta\|$ (prin $\|\Delta\|$ notăm norma diviziunii $\Delta$).

Mulţimile $\mathcal{S}_\Delta^*$ formează o bază de filtru $\mathcal{S}^*$. În adevăr, $\mathcal{S}_{\Delta'}^* \cap \mathcal{S}_{\Delta''}^* \supset \mathcal{S}_\Delta^*$, unde $\|\Delta\| < \min(\|\Delta'\|, \|\Delta''\|)$. $\mathcal{S}^*$ nu este vidă, deoarece $\mathbf{\Delta}$ nu este vidă şi fiecare $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ generează un $\mathcal{S}_\Delta^*$; $\mathcal{S}^*$ nu conţine partea vidă a lui $\mathbf{\Delta}$, deoarece orice $\mathcal{S}_\Delta^*$ conţine o infinitate de

elemente din $\Delta$. Fie $\mathcal{F}^*$ filtrul generat de $\mathcal{S}^*$ ($\mathcal{S}^*_\Delta$ este tot o secțiune la dreapta în $\Delta$, în care diviziunile sînt ordonate după normă, spre deosebire de $\mathcal{S}_\Delta$, unde diviziunile sînt ordonate după finețe).

O funcție $f$ poate fi cu variație mărginită pe $[a, b]$ și totuși să nu existe

$$\lim_{\mathcal{F}^*} v.$$

Se poate arăta însă că dacă $f$ este continuă și cu variație mărginită, atunci

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{\mathcal{F}} v = \lim_{\mathcal{F}^*} v.$$

Într-adevăr, aceasta revine la proprietatea binecunoscută că fiind dată o funcție $f$ continuă și cu variație mărginită, pentru orice șir $\Delta_n$ de diviziuni de normă tinzînd la zero avem

$$\lim_{n \to \infty} v(\Delta_n) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Există și funcții discontinue, cu variație mărginită, pentru care

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{\mathcal{F}} v = \lim_{\mathcal{F}^*} v;$$

sînt toate funcțiile cu variație mărginită pentru care avem, pentru orice $x$,

$$\min(f(x-0), f(x+0)) \leqslant f(x) < \max(f(x-0), f(x+0)).$$

Să considerăm funcția $\omega$, definită pe $\Delta$, așa cum s-a arătat mai sus. Vom arăta că pentru orice funcție $f$, cu variația mărginită pe $[a, b]$ și pentru orice șir de diviziuni $\Delta_n$ ale lui $[a, b]$, de normă tinzînd la zero, avem

$$\lim_{n \to \infty} \omega(\Delta_n) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Fie $\omega = \sum_k \omega_k$, unde $\omega_k = \omega(f;\ [x_k,\ x_{k+1}])$. Există pe $[x_k,\ x_{k+1}]$ două puncte $\xi_k$, $\eta_k$ astfel încît $|f(\xi_k) - f(\eta_k)| > \omega_k - \frac{\varepsilon}{n}$, unde $\varepsilon > 0$ este dat, iar $n$ este numărul de intervale ale diviziunii $\Delta$. Avem deci un $v$ dat de

$$v = \sum |f(\xi_k) - f(\eta_k)| + \sum |f(\xi_{k-1}) - f(\xi_k)| > \sum \omega_k - \varepsilon = \omega - \varepsilon.$$

Deci, $\sup\limits_{\Delta} \omega(\Delta) \leqslant \sup\limits_{\Delta} v(\Delta)$. Însă, în orice caz,

$$\sup_{\Delta} v(\Delta) \leqslant \sup_{\Delta} \omega(\Delta).$$

Rezultă deci că $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup \omega(\Delta)$. Se aplică acum raționamentul prin care se arată, în teoria integralei, că pentru orice şir de normă tinzînd la zero avem, notînd cu $s$ suma Darboux inferioară,

$$\lim_{n\to\infty} s(\Delta_n) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

unde se va înlocui $s(\Delta)$ cu $\omega(\Delta)$, iar $\int_a^b f(x)dx$ prin $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$.

Deci, pentru orice $f$, cu variație mărginită pe $[a,\ b]$, avem

$$\lim_{\mathcal{F}^*} \omega = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

## INTEGRALELE LUI DARBOUX ALE UNEI FUNCȚII MĂRGINITE

Să notăm cu $s(\Delta)$ suma Darboux inferioară asociată, pentru o funcție $f$, mărginită pe $[a,\ b]$, unei diviziuni $\Delta$. Avem, prin definiție,

$$\sup_{\Delta} s(\Delta) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observăm că se obține

$$\lim_{\mathcal{F}} s = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $\mathcal{F}$ este filtrul folosit pentru exprimarea variației totale.

Este suficient pentru aceasta să observăm că rămîn valabile raționamentele pentru variația totală. În locul funcției $v$ se consideră funcția $s$, definită pe aceeași mulțime $\Delta$.

Cu mici modificări în raționamente, se obține și

$$\lim_{\mathcal{F}} S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

unde $S(\Delta)$ este suma Darboux superioară.

Spre deosebire însă de variația totală, în a cărei expresie nu se putea înlocui, în general, filtrul $\mathcal{F}$ prin filtrul $\mathcal{F}^*$, aici este posibil acest lucru, deoarece pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît din $\| \Delta \| < \eta_\varepsilon$ să rezulte

$$\int_a^b (f(x)\,\mathrm{d}x - s(\Delta) < \varepsilon, \quad S(\Delta) - \int_a^{\bar{b}} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Avem

$$\lim_{\mathcal{F}^*} s = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \ \lim_{\mathcal{F}^*} s = \int_a^{\bar{b}} f(x)\mathrm{d}x.$$

Ținînd seama că pentru o funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$ cele două integrale Darboux sînt egale, avem, punînd

$$\tau(\Delta) = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1},$$

$$\lim_{\mathcal{F}^*} s = \lim_{\mathcal{F}^*} S = \lim_{\mathcal{F}} s = \lim_{\mathcal{F}} S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{\mathcal{F}^*} \tau = \lim_{\mathcal{F}} \tau,$$

ori de cîte ori funcția $f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

În particular, rezultă că și procesul de trecere la limită care intervine în definiția integralei constituie o limită după un anumit filtru.

# III

# Ce este lungimea unei curbe?

## INTRODUCERE

În capitolul de față încercăm să expunem evoluția noțiunii de lungime a unei curbe.

Pornind de la conținutul intuitiv al noțiunilor de „curbă“ și „lungime“, oamenii de știință au căutat de multă vreme să găsească cea mai potrivită traducere matematică a lui. În ciuda aparenței de simplitate pe care o prezintă această problemă, ea s-a dovedit a ascunde dificultăți și o teorie matematică completă a lungimii curbelor nu a putut fi construită decît în secolul nostru. Efortul pentru crearea acestei teorii a dat un impuls puternic dezvoltării unor importante capitole de matematică, de pildă teoria integralei, și chiar a unei întregi ramuri a matematicii, analiza funcțională.

În ce privește teoria ariei unei suprafețe, despre care o bună bucată de vreme matematicienii aveau impresia — greșită — că poate fi desfășurată ca o simplă transpunere a considerațiilor clasice asupra lungimii curbelor, trebuie să spunem că această teorie se desăvîrșește abia în zilele noastre.

În teoria lungimii și ariei rezultatele fundamentale au la bază observații atît de simple — și totuși atît de profunde —, observații legate de faptul banal de măsurare a lungimii unui drum sau a unui fir, încît cititorul rămîne oarecum surprins că matematicienii au putut să treacă atîta timp pe lîngă ele fără să le observe sau să le observe fără a trage consecințele din această observare.

Pentru a nu pierde din vedere linia principală, evoluția ideilor, vom înlătura, pe cît este posibil, detaliile și demonstrațiile.

## O EXPUNERE CLASICĂ A NOȚIUNII DE LUNGIME A CERCULUI

În definiția lungimii unei curbe apar două feluri de dificultăți. Unele provin din însăși complexitatea noțiunii de curbă, noțiune, care depășește intuiția obișnuită despre linie sau despre o trăsătură continuă; altele provin din netranspunerea fidelă în matematică a conținutului intuitiv al noțiunii de lungime.

Pentru a reține doar dificultățile de al doilea tip, este suficient să considerăm o curbă de o structură mai simplă, de pildă, un cerc.

O expunere clasică a noțiunii de lungime a unei circumferințe se găsește, de exemplu, în cartea lui Jacques Hadamard, *Lecții de geometrie elementară*. Editura Tehnică, București, 1960. Această expunere se poate rezuma astfel: se consideră un șir de poligoane regulate înscrise în circumferință și un șir de poligoane regulate circumscrise circumferinței, astfel încît fiecare poligon să aibă un număr dublu de laturi față de poligonul precedent. Poligoanele inițiale din cele două șiruri au același număr de laturi. Lungimile poligoanelor din primul șir merg crescînd, ale celor din al doilea șir merg descrescînd. Orice poligon din primul șir are lungimea mai mică decît orice poligon din al doilea șir.

Pe baza teoremei: „orice șir monoton și mărginit are o limită (finită)", se deduce că șirul lungimilor poligoanelor circumscrise și șirul lungimilor poligoanelor înscrise au fiecare o limită. Se arată că raportul perimetrelor a două poligoane de același rang din cele două șiruri tinde la 1 și se stabilește astfel egalitatea celor două limite. În sfîrșit, se demonstrează că valoarea acestei limite nu depinde nici de șirul particular de poligoane înscrise sau circumscrise, nici de faptul că aceste poligoane sînt sau nu regulate sau de faptul că numărul laturilor se dublează de fiecare dată; esențial este doar ca lungimea celei mai mari laturi a poligonului (înscris sau circumscris) să tindă la zero atunci cînd rangul tinde la infinit.

Care este punctul de pornire în încercarea de a defini lungimea cercului? Deoarece știm ce înseamnă lungimea unui segment de dreaptă (aceasta presupune cunoașterea noțiunii de număr real), deci a unei linii poligonale, este natural să încercăm să definim lungimea cercului cu ajutorul lungimilor liniilor poligonale care se apropie din ce în ce mai mult de cerc. Trebuie deci să găsim traducerea matematică a procesului reprezentat prin cuvintele „se apropie". Pare firească următoarea definiție:

O linie poligonală $P$ este la distanță inferioară lui $\varepsilon > 0$ față de circumferința $C$ de rază $r$, dacă $P$ este situată într-o coroană circulară concentrică cu $C$, ale cărei cercuri frontieră au razele $r - \varepsilon$ și $r + \varepsilon$.

Cîteva exemple care oglindesc această situație se pot vedea în fig. 1.III.

Dintre aceste exemple, reține în special atenția ultimul. Apropierea unei linii poligonale de o circumferință nu este condiționată de faptul că această linie poligonală este înscrisă sau circumscrisă circumferinței. Considerarea, cu exclusivitate, a poligoanelor înscrise și a celor circumscrise apare astfel arbitrară.

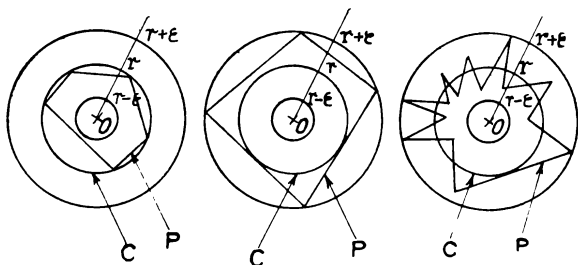


*Fig. 1.III*

Sîntem tentați să introducem următoarea definiție: lungimea circumferinței este limita către care tinde șirul lungimilor liniilor poligonale $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ ,... alese

în așa fel, încît pentru orice $n$, distanța de la $P$ la circumferință să fie inferioară lui $\frac{1}{n}$ (în sensul definiției de mai sus).

Deși luarea în considerație a liniilor poligonale de orice fel este un mare pas înainte, trebuie totuși să renunțăm la această definiție. În adevăr, dacă am adopta-o, am putea demonstra că lungimea oricărei circumferințe este egală cu infinit. Este suficient să observăm că oricît de mic ar fi $\varepsilon > 0$ și oricît de mare ar fi numărul $A$, există o linie poligonală $P$, situată față de circumferință la o distanță inferioară lui $\varepsilon$ și astfel încît lungimea lui $P$ să fie superioară lui $A$. Aceasta apare clar în fig. 2.III. Dacă unghiul dintre două laturi consecutive ale liniei poligonale este suficient de mic, atunci numărul laturilor din care este formată linia $P$ va fi destul de mare pentru ca lungimea lui $P$ să întreacă valoarea $A$.

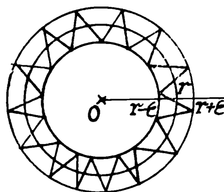


*Fig. 2.III*

Cel care a știut să utilizeze în mod judicios liniile poligonale apropiate de o curbă, în vederea unei definiții cît mai naturale a lungimii unei curbe și care să nu contrazică — ca cea de mai sus — nici un fapt intuitiv, a fost matematicianul Henri Lebesgue. Nu este, poate, lipsit de interes să spunem că Lebesgue și-a construit teoria sa pornind de la lucruri și observații elementare, mărturisind că această teorie are ca punct de plecare nemulțumirile pe care le avea ca elev de liceu în legătură cu modul în care se prezentau în manualele școlare, noțiunile de lungime și de arie. Aceste nemulțumiri vizau lucruri pe cît de simple, pe atît de profunde, legate mai întîi de lungimea cercului, aria cilindrului, a conului și, mai tîrziu, de teoria lui Camille Jordan, care domina la sfîrșitul secolului trecut concepțiile matematicienilor asupra lungimii și ariei. La început, Lebesgue a considerat satisfăcătoare teoria lui Jordan, dar ulterior, văzînd la ce încurcătură poate ea să conducă chiar într-un caz simplu ca aria unui cilindru de rotație, n-a mai fost mulțumit de această teorie.

Lebesgue și-a expus ideile sub forma unei critici aduse teoriei lui Jordan. Ele vor face obiectul unor paragrafe ulterioare ale acestui capitol. Să vedem deocamdată în ce constau ideile lui Jordan. Cu aceasta trecem, implicit, la discutarea acelor dificultăți care apar în definiția lungimii unei curbe, fiind provocate de însăși complexitatea noțiunii de curbă.

## DIFICULTĂȚI ȘI POTICNIRI ÎN ÎNCERCĂRILE DE DEFINIRE A NOȚIUNII DE CURBĂ

După Jordan, o curbă [1] este o mulțime de puncte ale căror coordonate $x$, $y$ sînt date de o reprezentare parametrică

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \tag{1}$$

funcțiile $f$ și $g$ fiind continue pe un același segment $[a, b]$. Este ușor de văzut că curbele obișnuite în geometria analitică, de exemplu, sînt curbe și în sensul definiției lui Jordan. Astfel, reprezentările parametrice

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \tag{2}$$

unde $t \in [0, 2\pi]$, definesc respectiv un segment de dreaptă, un cerc de rază $r$ cu centrul în originea axelor și elipsa de semiaxe $a$, $b$, centrată de asemenea în originea axelor.

Există însă curbe jordaniene care trec mult dincolo de intuiția pe care o avem despre o curbă. Astfel, Peano a dat un exemplu de curbă jordaniană care umple un pătrat. După Peano, mulți alți matematicieni au dat exemple similare. Unul dintre ele este reprodus în volumul II de *Analiză matematică*, apărut în Editura Academiei, al acad. Miron Nicolescu (p.14). Aceasta înseamnă că pătratul plin este și el o curbă, lucru care desigur ne face să zîmbim. Acest fapt curios se explică prin aceea că liniile cu care sîntem familiarizați, și anume cele folosite

---

[1] Ne restrîngem la curbe plane.

în geometrie, sînt definite într-un mod foarte restrictiv, cerîndu-se ca funcţiile care intervin în reprezentarea lor parametrică să aibă şi alte proprietăţi, în afară de continuitate. Este un fapt cunoscut că graficul unei funcţii continue nu este, în general, susceptibil de un desen. Trasarea unei linii pe o foaie de hîrtie presupune că imprimăm mîinii în fiecare moment o direcţie determinată. Deci linia trasată va avea tangentă în fiecare punct (exceptînd eventual un număr finit de puncte).

În afară de aceasta, trebuie să menţionăm că nici definiţia curbei jordaniene nu este completă. O curbă nu este doar o mulţime de puncte definită de (1), ci o astfel de mulţime, împreună cu reprezentarea ei parametrică, adică mulţimea de puncte date de (1), împreună cu reprezentarea (1).

Aici însă apar unele complicaţii, deoarece, cu precizarea adusă definiţiei noţiunii de curbă, se poate întîmpla ca două reprezentări care coincid vizual, avînd acelaşi grafic, să definească totuşi curbe distincte. De pildă, reprezentările parametrice

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^2 \end{cases}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{3}$$

definesc aceeaşi mulţime $\Gamma$ de puncte, şi anume segmentul de dreaptă care uneşte originea axelor cu punctul (1, 2). La prima vedere, sîntem tentaţi să spunem că acest segment reprezintă două curbe diferite, după cum este considerat cu prima sau cu a doua reprezentare parametrică. Însă cele două reprezentări induc aceeaşi relaţie de ordine pe $\Gamma$, în sensul că dacă pentru $P_1 \in \Gamma$, $P_2 \in \Gamma$ avem $P_1 > P_2$ (adică valoarea $t_1$ a parametrului, căruia îi corespunde $P_1$, este mai mare decît valoarea $t_2$, căreia îi corespunde punctul $P_2$) după prima reprezentare, atunci avem $P_1 > P_2$ şi după a doua reprezentare şi reciproc. Relaţia de ordine este lipsită de ambiguitate, neexistînd nici un punct de pe $\Gamma$ care să corespundă la două valori distincte ale lui $t$. După cum se vede, nu ar fi firesc să spunem că avem aici două curbe diferite.

Se pot însă ivi şi cazuri mai complicate. Fie, de pildă, o funcţie $f(t)$, definită şi derivabilă pe [0, 1], avînd ca mul-

ţime a valorilor segmentul [0, 1] şi astfel încît derivata $f'(t)$ să-şi schimbe semnul în cel puţin un punct din [0, 1]. Mai general, s-ar putea considera $f(t)$ continuă şi nemonotonă pe [0, 1], cu mulţimea valorilor dată tot de [0, 1]). Reprezentările parametrice

$$\begin{cases} x = t \\ x = 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = 2f(t) \end{cases}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad (4)$$

definesc aceeaşi mulţime de puncte, dar nu induc aceeaşi ordine pe această mulţime. Propriu-zis, a doua reprezentare nici nu induce o ordine determinată, deoarece există puncte care corespund la mai multe valori ale lui $t$.

De exemplu:

$$f(t) = 8t^3 - 9t^2 + 2t.$$

Punctul $M$ de coordonate $(f(t), 2f(t))$ descrise, cînd $t$ variază de la 0 la 1, segmentul $\Gamma$ de mai sus, dar ca în

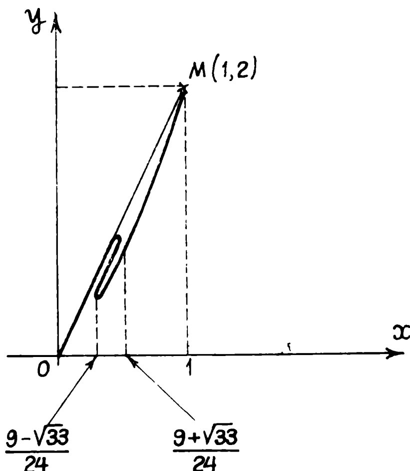



*Fig. 3.III*

fig. 3.III. Aceasta rezultă din faptul că o funcţie continuă care nu ia nici o valoare de mai multe ori este monotonă; or, prin ipoteză, $f(t)$ nu este monotonă. Deci este legitim

să considerăm că reprezentările (4), spre deosebire de (3), definesc curbe distincte. Fenomene de acest tip au mai fost întîlnite în analiză. De pildă, două şiruri distincte de numere reale pot să parcurgă fiecare în parte aceeaşi mulţime, de exemplu mulţimea numerelor raţionale.

Discuţia de mai sus învederează necesitatea de a introduce cîteva definiţii.

Un punct $P$ al unei curbe jordaniene, dată de (1), se numeşte punct multiplu, dacă există cel puţin două valori $t_1$ şi $t_2$ din $[a, b]$, dintre care cel puţin una este diferită atît de $a$, cît şi de $b$ şi astfel încît $f(t_1) = f(t_2)$, $g(t_1) = g(t_2)$.

Dreapta, cercul, elipsa — cu reprezentările date de (2) — nu admit puncte multiple. În schimb, foliul lui Descartes, definit de

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

admite un punct multiplu în originea axelor (fig. 4.III).

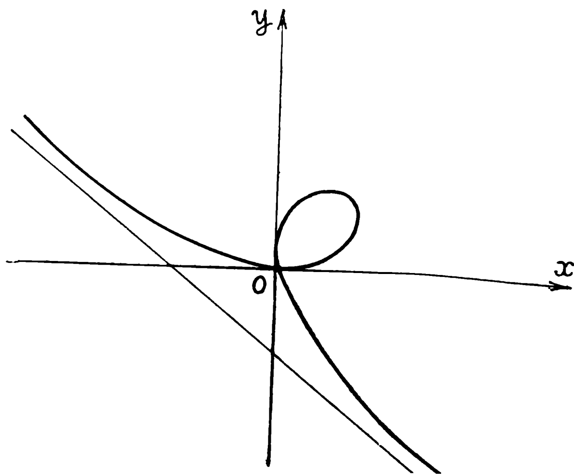



*Fig. 4.III*

Din cele văzute rezultă că tocmai prezenţa punctelor multiple complică structura unei curbe şi oferă dificultăţi în distingerea ei de o altă curbă, cu acelaşi grafic.

Se poate arăta, dar nu vom face aceasta aici, că punctele multiple sînt „vinovate“ și de existența curbelor care umplu un pătrat, cu alte cuvinte, dacă o curbă umple un pătrat atunci ea are puncte multiple.

O curbă jordaniană care nu admite nici un punct multiplu se numește curbă simplă. Dacă $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, atunci avem o curbă închisă. O curbă simplă care nu este închisă se numește un arc simplu. Punctele $A(f(a), g(a))$ și $B(f(b), g(b))$ se numesc, în acest caz, extremitățile arcului. Cercul și elipsa date de (2) sînt curbe simple închise. Segmentul de dreaptă dat de prima reprezentare din (2) este un arc simplu.

## NOȚIUNEA DE CURBĂ ÎN ANALIZĂ

Discuția de mai sus conduce în mod natural la cîteva definiții noi, care oglindesc cu mai multă fidelitate, într-un mod mai nuanțat, complexitatea conceptului intuitiv de curbă și care ne vor da posibilitatea să studiem în mod riguros și conceptul de lungime a unei curbe.

Numim drum orice aplicație continuă a unui segment $[a, b]$ în $R^2$ (adică în plan) sau în $R^3$ (adică în spațiu). În primul caz spunem că avem un drum plan, în al doilea, un drum în spațiu. Pentru simplitate, vom considera în mod explicit numai drumuri plane, dar considerațiile se extind fără dificultate și la drumuri în spațiu.

Fie două drumuri plane $d_1$ și $d_2$. Fie $[a, b]$ segmentul de definiție a lui $d_1$ și fie $[\alpha, \beta]$ segmentul de definiție a lui $d_2$. Vom spune că drumurile $d_1$ și $d_2$ sînt echivalente dacă există o aplicație $\varphi$ definită pe $[a, b]$, cu valori în $[\alpha, \beta]$, continuă și strict crescătoare pe $[a, b]$ și astfel încît $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ și $d_1(t) = d_2(\varphi(t))$ pentru orice $t$ din $[a, b]$. Relația introdusă este o veritabilă relație de echivalență; reflexivitatea se verifică luînd în rolul lui $\varphi$ aplicația identică; simetria este o consecință a faptului că inversa unei funcții continue și strict crescătoare este o funcție cu aceleași proprietăți; tranzitivitatea rezultă din faptul că suprapunerea a două funcții continue și strict crescătoare este tot o funcție continuă, strict crescătoare.

În felul acesta, toate drumurile se repartizează în clase de echivalență. Fiecare dintre aceste clase va constitui, prin definiție, o curbă.

Acest mod de a introduce noțiunea de curbă poate să surprindă pe unii cititori; într-adevăr, există în matematica elementară obiceiul de a considera conceptul de curbă ca fiind de natură geometrică, în timp ce aici acest concept se definește ca o clasă de aplicații continue, deci este de natură esențial analitică. Apoi, o curbă este aici privită ca rezultat al unui proces de identificare a unor aplicații considerate indiscernabile din punctul de vedere pe care l-am adoptat, deci ca o clasă de echivalență în interiorul căreia alegerea unui element este o chestiune de comoditate, dar nu de principiu.

Caracterul analitic al conceptului de curbă nu trebuie totuși să ne împiedice să vedem componenta sa geometrică. O teoremă importantă afirmă că dacă două drumuri sînt echivalente, ele au același grafic; este suficient, pentru a obține același rezultat, să ținem seamă că atunci cînd $t$ parcurge pe $[a, b]$, $\varphi(t)$ parcurge pe $[\alpha, \beta]$, iar cînd $\tau$ parcurge pe $[\alpha, \beta]$, $\varphi^{-1}(\tau)$ parcurge pe $[a, b]$, în timp ce pentru oricare valoare a lui $t$ din $[a, b]$ avem egalitatea $d_1(t) = d_2(\varphi(t))$. (Am folosit notațiile din definiția relației de echivalență a două drumuri.) De aici rezultă că fiecărei curbe i se asociază, în mod natural, o anumită mulțime de puncte care constituie graficul curbei și care nu este altceva decît graficul comun tuturor drumurilor din clasa corespunzătoare de echivalență. Acest grafic constituie componenta geometrică a conceptului analitic de curbă, componentă prin intermediul căreia acest concept se înrudește cu conceptul geometric corespunzător.

Fie $(x_0, y_0)$ un punct de pe graficul $d$ definit de (1). Spunem că acest punct este simplu pentru $d$ dacă nu există două valori $t_1$, $t_2$ din $[a, b]$, $t_1 \neq t_2$ (dintre care cel puțin una este diferită atît de $a$, cît și de $b$) și astfel încît să avem $d(t_1) = d(t_2) = (x_0, y_0)$. Un punct care nu este simplu se numește multiplu. Un drum fără puncte multiple se numește drum simplu.

Drumul $d$ dat de (1) este prin definiție închis dacă avem $d(a) = d(b)$.

Un număr de teoreme relativ simple ne asigură că două drumuri echivalente sînt de aceeași natură, în sensul că dacă unul dintre ele este simplu (sau închis), atunci și celălalt este simplu (respectiv închis). Aceasta ne permite să putem vorbi despre curbe simple (deci care conțin numai drumuri simple) și despre curbe închise (deci care conțin numai drumuri închise).

Dacă însă fiecărei curbe i se asociază în mod natural o componentă geometrică, nu trebuie să ne scape faptul important că această componentă geometrică *nu* caracterizează curba, *nu* o individualizează. Într-adevăr, este posibil ca două curbe distincte să aibă același grafic. Astfel, drumurile date de reprezentările (4) nu sînt echivalente, deoarece primul este simplu, pe cînd al doilea nu este simplu. Deci aceste două drumuri definesc două curbe distincte. Totuși, aceste curbe au același grafic și anume segmentul de dreaptă care unește originea axelor cu punctul de abscisă 1 și ordonată 2. În schimb, cele două drumuri definite de reprezentările (3) sînt echivalente, după cum se poate verifica luînd în rolul funcției $\varphi$, funcția $\varphi(t) = t^2$. Deci aceste două drumuri definesc una și aceeași curbă.

Această concepție despre curbă, privită ca o clasă de drumuri echivalente, ne amintește de un alt concept important al analizei matematice, acela de număr real. Noțiunea de număr real se definește de asemenea ca o clasă de echivalență, anume ca o clasă de șiruri convergente de numere raționale, echivalența a două șiruri revenind la faptul că șirul diferență converge către zero. Ne amintim că în practica obișnuită a analizei matematice numărul real este identificat cu un șir din clasa care-l definește, lucru permis datorită faptului că proprietățile unui număr real sînt implicate în oricare dintre șirurile care-l reprezintă. Dar această situație reclamă o deosebită atenție, deoarece o noțiune sau operație relativă la șiruri convergente de numere raționale nu poate deveni o noțiune sau operație relativă la numere reale decît după ce se demonstrează invarianța ei față de relația de echivalență a două șiruri convergente de numere raționale. Astfel, ne amintim, pentru ca operația de adunare a două astfel de șiruri să poată fi ridicată la rangul de operație de adu-

nare a două numere reale era necesar să demonstrăm, în prealabil, că rezultatul acestei operaţii nu se schimbă atunci cînd unul dintre şiruri este înlocuit cu un altul, echivalent cu el.

Precauţii asemănătoare se impun şi în studiul curbelor. Putem identifica, pentru comoditate, o curbă cu unul oarecare dintre drumurile care o definesc, putem considera aceste noţiuni ca fiind indiscernabile, cu condiţia de a nu uita, oridecîteori se introduce o noţiune sau operaţie relativă la drumuri, că ele nu pot deveni apanajul curbelor corespunzătoare decît dacă se demonstrează invarianţa lor faţă de relaţia de echivalenţă a două drumuri.

## CE ESTE UN DRUM RECTIFICABIL ?

Fie $d$ un drum dat de (1). Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a segmentului $[a, b]$. Fie $P_i$ punctul de coordonate $f(t_i), g(t_i)$. Fie $\Pi_\Delta$ linia poligonală formată prin unirea, două cîte două, în ordinea scrisă, a punctelor $P_0$, $P_1$, $P_2, \ldots, P_i$, $P_{i+1}, \ldots, P_n$. $\Pi_\Delta$ este înscrisă în $d$, în sensul că vîrfurile lui $\Pi_\Delta$ sînt situate pe graficul lui $d$. Fie $l(\Pi_\Delta)$ lungimea lui $\Pi_\Delta$. Spunem că $d$ este rectificabil în sensul lui Jordan, dacă mulţimea numerelor $\{l(\Pi_\Delta)\}$ este mărginită atunci cînd $\Delta$ parcurge toate diviziunile posibile ale lui $[a, b]$. Cel mai mic număr $K$ (se demonstrează existenţa lui!), astfel încît pentru orice $\Delta$, $l(\Pi_\Delta) \leqslant K$, se numeşte lungimea drumului $d$. Notăm această lungime cu $l(d)$.

Definiţia dată comportă unele discuţii. Mai întîi, poate să pară curios că nu considerăm totalitatea liniilor poligonale înscrise în $d$, ci doar acele linii poligonale care sînt induse de diviziuni ale lui $[a, b]$. Dacă însă nu am proceda aşa, definiţia pusă n-ar mai fi bună la nimic, pentru că ar fi lipsită de obiect. N-ar mai exista nici un drum rectificabil; fiecare drum ar avea o lungime infinită. Să luăm, de pildă, o circumferinţă (fig. 5. III). Este vizibil că putem înscrie în ea o linie poligonală a cărei lungime să întreacă un număr dat, unind, două cîte două, diverse puncte ale circumferinţei de un număr suficient de mare de ori.

Se pune în mod firesc următoarea întrebare: definiţia elementară a lungimii cercului (considerat cu reprezentarea parametrică din (2)) coincide cu definiţia dată mai sus, datorită lui Jordan? Răspunsul este afirmativ. Pentru a-l obţine, vom da mai întîi un rezultat general.

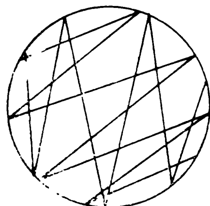


Fig. 5.III

Fie $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ o diviziune a lui $[a, b]$. Numărul

$$\nu(\Delta) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{(t_{i+1} - t_i)\}$$

se numeşte norma diviziunii $\Delta$.

Fiecărei diviziuni $\Delta$ a lui $[a, b]$ îi corespunde o linie poligonală $\Pi_\Delta$, înscrisă în $d$ şi avînd drept vîrfuri punctele $P_i(f(t_i)), g(t_i))$; $(i = 0, \ldots, n)$. Se poate arăta că pentru un şir de diviziuni $\Delta_n$, pentru care

$$\lim_{n \to \infty} \nu(\Delta_n) = 0$$

avem:

$$\lim_{n \to \infty} l(\Pi_{\Delta_n}) = l(d).$$

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii se foloseşte următoarea observaţie: Dacă orice punct de diviziune în $\Delta'$ este punct de diviziune în $\Delta''$, atunci $l(\Pi_{\Delta'}) \leqslant l(\Pi_{\Delta''})$. Nu vom da această demonstraţie.

Deoarece drumul cu care lucrăm este simplu, se poate arăta că dacă $\lim \nu(\Delta_n) = 0$, atunci şi lungimea celei mai mari laturi a liniei poligonale $\Pi_{\Delta_n}$ tinde la zero şi reciproc. De aici rezultă: lungimea, în sensul lui Jordan, a unui drum simplu, poate fi privită ca limita lungimilor unor linii poligonale înscrise în drum, pentru care lungimea celei mai mari laturi tinde la zero. (Lucrăm tot timpul numai cu linii poligonale induse de diviziuni ale lui $[a, b]$, prin intermediul reprezentării (1).)

Să ne întoarcem acum la lungimea cercului. Un poligon regulat $\Pi_n$ cu $n$ laturi, înscrise într-un cerc, corespunde unei anumite diviziuni $\Delta_n$ a intervalului $[0, 2\pi]$, diviziune formată cu acele valori ale lui $t$ cărora le cores-

pund, prin a doua reprezentare din (2), vîrfurile poligonului $\Pi_n$. Atunci cînd $n \to \infty$, lungimea unei laturi a poligonului regulat înscris $\Pi_n$, tinde la zero, deci $\lim_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$. De aici rezultă, conform propoziției generale de mai sus, că

$$\text{lungimea cercului} = \lim_{n\to\infty} l(\Pi_n),$$

lungimea fiind luată în sensul definiției lui Jordan. Prin aceasta s-a demonstrat, implicit, că cercul (considerat cu reprezentarea din (2)) este un drum rectificabil.

## UN CRITERIU DE RECTIFICABILITATE

Fie un drum $d$ dat de reprezentarea (1).

Este important să se stabilească ce proprietăți trebuie să aibă aceste funcții pentru ca $d$ să fie rectificabil și, dacă este posibil, să se exprime însăși lungimea drumului cu ajutorul acestor funcții. Soluția primei probleme o vom da imediat; soluția celei de-a doua va fi dată ceva mai tîrziu.

Mai întîi să amintim o noțiune din §11, capitolul II. O funcție reală $f(t)$, definită pe $[a, b]$, este cu variație mărginită pe $[a, b]$, dacă există un număr $K$, astfel încît, oricare ar fi diviziunea $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$, avem:

$$v(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leqslant K. \qquad (5)$$

Pentru a înțelege sensul intuitiv al acestei noțiuni, este suficient să observăm semnificația expresiei lui $v(\Delta)$, dată de (5). Numărul $v(\Delta)$ însumează toate modificările pe care le suferă funcția pe parcursul de la $a$ la $b$, dacă se face abstracție de valorile pe care ea le ia în interiorul intervalelor care alcătuiesc diviziunea $\Delta$. Este clar atunci că pentru a avea o măsură cît mai bună a modificărilor pe care valorile funcției le suferă între $a$ și $b$ este indicat să îndesim cît mai mult punctele diviziunii $\Delta$. Cum numărul $v(\Delta)$ nu scade atunci cînd adău-

găm noi puncte diviziunii $\Delta$, este natural să se îndrepte atenția asupra celui mai mic număr $K$ cu proprietatea (5). (Se poate arăta că un astfel de număr există.) Acest număr va da cea mai bună măsură a modificărilor pe care funcția $f(x)$ le suferă pe segmentul $[a, b]$. Cel mai mic număr $K$ cu proprietatea (5) se numește variația totală a funcției $f(t)$ de la $a$ la $b$ și se notează $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ (a se vedea și § 11 din capitolul II).

O funcție cu variație mărginită pe $[a, b]$ este tot una cu o funcție care se poate scrie ca diferență a două funcții monoton crescătoare pe $[a, b]$. Într-adevăr, dacă notăm cu $\varphi(x)$ variația totală de la $a$ la $x$ a funcției $f$ și cu $\psi(x)$ diferența $\varphi(x) - f(x)$, funcțiile $\varphi$ și $\psi$ sînt monoton crescătoare pe $[a, b]$. Orice funcție $f(t)$ cu derivată mărginită pe $[a, b]$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$. În adevăr, aplicînd formula creșterilor finite, avem, pentru o diviziune $\Delta$ arbitrară,

$$v(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} | f(t_{i+1}) - f(t_i) | = \sum_{i=0}^{n-1} | f'(\xi_i) | (t_{i+1} - t_i),$$
$$(t_i < \xi_i < t_{i+1}).$$

Prin ipoteză, există un număr $M > 0$, astfel încît $| f'(t) | < M$, pentru orice $t \in [a, b]$, deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} | f'(\xi_i) | (t_{i+1} - t_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M(t_{i+1} - t_i) = M(b - a),$$

deci

$$v(\Delta) < M(b - a),$$

pentru orice diviziune $\Delta$ a lui $[a, b]$.

Iată un exemplu simplu de funcție care nu este cu variație mărginită (fig. 6.III):

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Pe segmentul $[-1, 1]$ există o infinitate de puncte $x$ în care $f(x) = 0$ $\left(\text{anume } x_n = \frac{1}{n\pi}\right)$ și o infinitate de puncte $x$ în care $f(x) = \pm 1$ $\left(\text{anume } x'_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}\right)$. Lu-

înd un număr destul de mare de puncte $x_n$ și $x'_n$, vom putea forma cu aceste puncte o diviziune $\Delta$, pentru care $v(\Delta)$ să fie oricît de mare dorim.

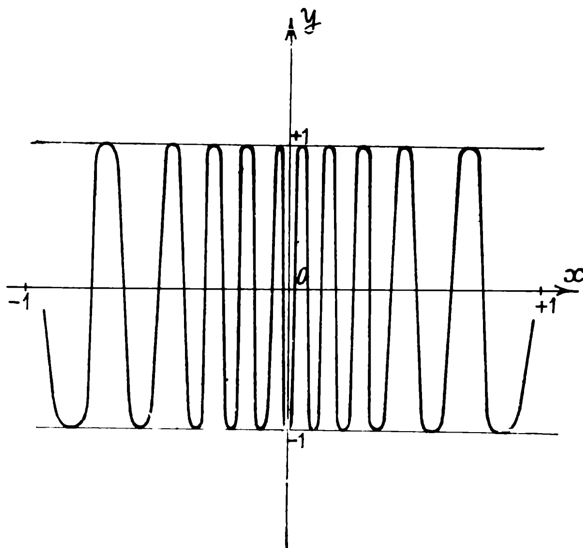



*Fig. 6.III*

Vom demonstra acum următoarea teoremă a lui Jordan: necesar și suficient ca drumul $d$ dat de (1) să fie rectificabil, este ca funcțiile $f$ și $g$ să fie cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Într-adevăr pentru o diviziune $\Delta$ a lui $[a, b]$ avem:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|\end{array}\right\} \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1})-f(t_i)]^2+[g(t_{i+1})-g(t_i)]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |(f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |g(t_{i+1}) - g(t_i)|), \qquad (6)$$

deoarece se știe din algebra elementară că dacă $a_1, a_2, \ldots,$ $\ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt $2n$ cantități nenegative, atunci

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n} a_i \\ \sum_{i=1}^{n} b_i\end{array}\right\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

Suma de la mijloc reprezintă lungimea unei linii poligonale înscrisă în $d$, și anume a liniei poligonale care are drept vîrfuri punctele corespunzătoare prin (1) valorilor $t_i$ ale diviziunii $\Delta$. Deci, dacă suma de la mijloc este, pentru orice $\Delta$, inferioară unui $K$ fix, atunci $d$ este rectificabil.

Să presupunem acum că $f$ și $g$ sînt cu variație mărginită. Suma din dreapta va fi, pentru orice $\Delta$, inferioară unui număr $K$ (independent de $\Delta$), deci cu atît mai mult va avea această proprietate suma de la mijloc. Dar aceasta înseamnă, după cum am văzut, tocmai rectificabilitatea lui $d$.

Reciproc, dacă $d$ este rectificabil, atunci suma de la mijloc este, pentru orice $\Delta$, inferioară unui $K$ independent de $\Delta$. Cu atît mai mult vor fi inferioare lui $K$ cele două sume din stînga. Aceasta înseamnă că $f$ și $g$ sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Funcțiile care definesc în (2) reprezentarea parametrică a cercului, a elipsei sau a unui segment de dreaptă sînt cu variație mărginită, deoarece au derivată mărginită. Deci segmentul de dreaptă, cercul, elipsa date de (2) sînt curbe rectificabile. Acum este ușor să construim și un exemplu de drum simplu nerectificabil. Fie, în adevăr, funcția

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Această funcție este continuă pe $[0, 1]$, dar nu este cu variație mărginită pe $[0, 1]$, cum se poate vedea ușor. Deci drumul definit de $x = f(t)$, $y = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ este

un drum simplu, nerectificabil (absenţa punctelor multiple este evidentă).

Să dăm şi un exemplu de două drumuri cu acelaşi grafic, unul rectificabil, iar celălalt nerectificabil. Fie $d_1$ şi $d_2$ drumurile date de

$$d_1:\begin{cases} x_1 = t, \\ y = t, \end{cases} \quad d_2:\begin{cases} x = f(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

unde $f$ este o funcţie continuă care nu este cu o variaţie mărginită pe $[0, 1]$, iar $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ şi $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$ pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$. Atît $d_1$ cît şi $d_2$ au ca grafic segmentul de dreaptă care uneşte originea axelor cu punctul (1, 1); $d_1$ este simplu şi rectificabil, deoarece $\varphi(t) = t$ este cu variaţie mărginită ; $d_2$ nu este rectificabil, deoarece $f(t)$ nu este cu variaţie mărginită.

Un exemplu de două drumuri cu acelaşi grafic, amîndouă rectificabile, dar avînd lungimi diferite, poate fi găsit în tratatul *Analiză matematică* al acad. Miron Nicolescu (Editura Academiei, vol. II, 1953, pp. 67—68).

## NOŢIUNEA DE CURBĂ RECTIFICABILĂ

Pentru a introduce această noţiune, trebuie mai întîi să ne convingem că noţiunea de drum rectificabil este invariantă prin relaţia de echivalenţă a două drumuri. Fie un drum $d$ dat de (1) şi un drum $d_1$ dat de reprezentarea $x = f_1(\tau)$, $y = g_1(\tau)$, unde $f_1$ şi $g_1$ sînt continue pe $[\alpha, \beta]$. Să presupunem că drumurile $d$ şi $d_1$ sînt echivalente şi că drumul $d$ este rectificabil, şi să arătăm că drumul $d_1$ este de asemenea rectificabil. Există deci o funcţie $\varphi$, continuă şi strict crescătoare pe $[a, b]$, cu valori în $[\alpha, \beta]$, astfel încît $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ şi $d(t) = d_1(\varphi(t))$ pentru orice $t$ din $[a, b]$. Fiind dată o diviziune $\Delta = (a = t_0 < < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b)$ a intervalului $[a, b]$, ei îi corespunde, prin aplicaţia $\varphi$, o diviziune $\Delta_1 = (\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \tau_{i+1} < \ldots < \tau_n = \beta)$ a intervalului $[\alpha, \beta]$ şi reciproc, diviziunii $\Delta_1$ îi corespunde

prin inversa funcţiei $\varphi$, diviziunea $\Delta$. (Aici, $\tau_i = \varphi(t_i)$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n$.) Avem:

$$l_\Delta(d) = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{[f_1(\varphi(t_{i+1})) - f_1(\varphi(t_i))]^2 + [g_1(\varphi(t_{i+1})) - g_1(\varphi(t_i))]^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sqrt{[f_1(\tau_{i+1}) - f_1(\tau_i)]^2 + [g_1(\tau_{i+1}) - g_1(\tau_i)]^2} = l_{\Delta_1}(d_1),$$

deci

$$l(d) = \sup_{\Delta} l_\Delta(d) = \sup_{\Delta_1} l_{\Delta_1}(d_1) = l(d_1)$$

şi cele două drumuri au aceeaşi lungime. Drumul $d$ fiind însă rectificabil, $l(d)$ este finită , deci $l(d_1)$ este finită, iar drumul $d_1$ este rectificabil.

Am demonstrat astfel chiar mai mult decît ne-am propus. Am arătat că nu numai proprietatea de rectificabilitate, dar şi lungimea unui drum este invariantă prin relaţia de echivalenţă a două drumuri. Această situaţie legitimează pe deplin următoarele două definiţii:

Numim curbă rectificabilă o clasă de drumuri rectificabile echivalente.

Lungimea unei curbe este, prin definiţie, lungimea comună a drumurilor care definesc curba considerată.

Rezultă, în baza criteriului de rectificabilitate al lui Jordan, că dacă un drum este definit de funcţii cu variaţie mărginită, atunci orice drum echivalent cu el este definit tot de funcţii cu variaţie mărginită.

Cele stabilite ne permit să studiem o curbă rectificabilă prin intermediul unuia singur dintre drumurile care o reprezintă. Aşadar, vom folosi uneori termenul de curbă chiar dacă, în mod efectiv, lucrăm doar cu unul dintre drumurile care îi aparţine.

## CRITICA ADUSĂ DE LEBESGUE TEORIEI CLASICE A LUNGIMII

A sosit momentul să expunem critica făcută de Lebesgue teoriei clasice a lungimii unei curbe.

Confuzia cea mai gravă pe care teoria clasică o strecoară în capul cititorului (chiar dacă aceasta nu se face în mod explicit) este ideea că lungimea ar fi o funcţie continuă de curbă. Iată cum se ajunge aici la noţiunea de continuitate:

Maurice Fréchet asociază fiecărei perechi $C$, $\Gamma$ de curbe un număr nenegativ $(C, \Gamma)$ pe care-l numeşte *ecartul* acelor două curbe. Acest număr este astfel, încît $(C, \Gamma) = 0$ dacă şi numai dacă $C$ şi $\Gamma$ coincid, $(C, \Gamma) = (\Gamma, C)$ şi, fiind date trei curbe $C_1$, $C_2$ şi $C_3$, avem $(C_1, C_2) \leqslant (C_1, C_3) + (C_2, C_3)$. Iată cum se poate defini un astfel de număr.

Fie $x = f(t)$, $y = g(t)$ şi $x = \Phi(t)$, $y = \Psi(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ nişte reprezentări parametrice ale curbelor $C$ şi $\Gamma$. ($f$, $g$, $\Phi$ şi $\Psi$ sînt continue pe $[0, 1]$). Să punem

$$\delta(t) = \sqrt{[f(t) - \Phi(t)]^2 + [g(t) - \Psi(t)]^2};$$

$\delta(t)$ este o funcţie continuă pe $[0, 1]$, deci admite un maxim absolut $d$ pe $[0, 1]$. Acest $d$ depinde de reprezentările parametrice alese pentru $C$ şi $\Gamma$. Fie $\omega$ cel mai mic număr (se arată existenţa lui) din mulţimea de numere $d$, obţinute pentru toate reprezentările parametrice posibile ale lui $C$ şi $\Gamma$. Acest număr $\omega$ satisface proprietăţile din definiţia ecartului şi este numit ecartul curbelor $C$ şi $\Gamma$. După cum se vede, ecartul este pentru două curbe ceea ce este definiţia obişnuită pentru două puncte.

Acum dispunem şi de un nou mod de a aprecia depărtarea a două curbe.

Spunem că şirul de curbe $\{\Gamma_n\}$ tinde către curba $\Gamma$ dacă distanţa între $\Gamma$ şi $\Gamma_n$ este inferioară lui $\varepsilon_n > 0$, iar şirul $\{\varepsilon_n\}$ tinde la zero.

Astfel, putem spune că un şir de curbe $\{C_n\}$ tinde către curba $C$, dacă ecartul $(C, C_n)$ tinde la zero o dată cu $\frac{1}{n}$.

O condiţie necesară şi suficientă ca aceasta să se întîmple

este ca pentru orice reprezentare parametrică $x = f(t)$, $y = g(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ a lui $C$ să se poată alege o reprezentare parametrică a lui $C_n$, fie ea $x = f_n(t)$, $y = g_n(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, astfel încît $f_n$ să tindă uniform către $f$, iar $g_n$ să tindă uniform către $g$ pe $[0, 1]$, adică fiecărui $\varepsilon > 0$ să-i corespundă un $N$ cu proprietatea că $| f_n(t) - f(t) | < \varepsilon$, $| g_n(t) - g(t) | < \varepsilon$, de îndată ce $n > N$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$.

O funcție reală $\varphi(\Gamma)$ de curba $\Gamma$ [1] va fi, prin definiție, continuă dacă pentru orice șir $\{\Gamma_n\}$ de curbe, care tinde către $\Gamma$, avem:

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(\Gamma_n) = \varphi(\Gamma).$$

Dacă un șir de linii poligonale tinde către un cerc în sensul definiției date în paragraful 6, atunci acest șir tinde către cerc și în sensul definiției date aici. Deci, poligoanele regulate folosite în definiția lungimii cercului formează un șir care tinde către cerc, atît în sensul definiției date în paragraful 6, cît și în sensul celei date aici.

Teoria obișnuită a lungimii cercului se bazează, în mod tacit, pe următorul deziderat, de fapt irealizabil: dacă un șir de linii poligonale tinde către circumferință, atunci lungimea circumferinței este însăși limita lungimilor liniilor poligonale. Apropierea liniilor poligonale de circumferință este concretizată în șirul de poligoane regulate înscrise, pentru care numărul laturilor tinde la infinit.

Afirmația că dezideratul de mai sus este irealizabil poate fi justificată. Aici, ne vom mulțumi să constatăm că fig. 7.III este elocventă în această privință. Pentru două numere pozitive date $\varepsilon$ și $K$ se pune în evidență posibilitatea ca linie poligonală să fie, față de circumferință, la distanță inferioară lui $\varepsilon$ și de lungime superioară lui $K$.

S-ar putea obiecta că nu a fost aleasă judicios definiția distanței; dar această definiție nu poate fi pusă în mod arbitrar. O distanță, oricum ar fi definită, trebuie să sa-

---

[1] O funcție reală de curba $\Gamma$ este o lege care asociază fiecărei curbe $\Gamma$ un număr real unic determinat $\varphi(\Gamma)$.

tisfacă anumite cerinţe intuitive. În particular, ar fi inadmisibil ca o linie conţinută într-un manşon (coroană circulară) de lăţime ε, care îmbracă circumferinţa, să nu fie considerată la distanţă inferioară lui ε faţă de circumferinţă.

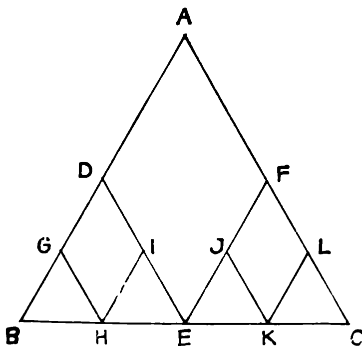


*Fig. 7.III*

Oricîte reproşuri am adus sau am mai aduce teoriei clasice a lungimii cercului, cititorul nu va putea fi clintit din convingerea sa că totuşi definiţia lungimii circumferinţei cu ajutorul poligoanelor regulate înscrise conduce la un rezultat corect, adică la acelaşi număr la care ar conduce cine ştie ce teorie savantă, teorie lipsită de defectele enumerate aici. Această convingere a cititorului corespunde realităţii, dar ea nu face decît să mărească gravitatea greşelilor comise. Dacă un raţionament greşit conduce la un rezultat absurd, însăşi absurditatea rezultatului atrage atenţia asupra greşelii şi face imposibilă repetarea ei. Dacă însă rezultatul este corect, greşeala poate să treacă neobservată, să se repete apoi în alte probleme şi să contamineze capitole întregi.

Exact aşa s-a întîmplat multă vreme cu greşelile comise în definirea lungimii cercului. Aceste greşeli au trecut neobservate şi matematicienii le-au repetat în definiţia ariei unei suprafeţe. Cît de stupefiată a rămas lumea matematică atunci cînd H. A. Schwarz a pus în evidenţă, printr-un exemplu devenit celebru, că nici măcar pentru o suprafaţă cilindrică circulară vechea definiţie a ariei, transpunere fidelă a definiţiei lungimii cercului, nu este satisfăcătoare, putînd conduce la rezultatul absurd că un cilindru circular de rază şi înălţime finite poate avea o arie infinită!

Cel mai simplu exemplu care arată că lungimea unei curbe nu este o funcție continuă de curbă este următorul:

Fie triunghiul echilateral $ABC$ de latură 1 (fig. 7.III). Fie $D$, $E$ și $F$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și $AC$. Fie apoi $G$, $H$, $I$, $J$, $K$, $L$ mijloacele segmentelor $BD$, $BE$, $DE$, $EF$, $CE$ și $CF$ ș.a.m.d. Linia poligonală $BAC$ se află la distanță $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ de $BC$; linia poligonală $BDEFC$ se află la distanță $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$ de $BC$; linia poligonală $BGHIEJKLC$ se află la distanță $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2^2}$ de $BC$; a $n$-a linie poligonală obținută prin procedeul arătat va fi situată la distanță $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2^n}$ de $BC$. Se obține astfel un șir de linii poligonale care tinde către segmentul $BC$. Printr-un raționament simplu se constată că fiecare linie poligonală din șir are lungimea constant egală cu 2. Ar însemna deci, dacă lungimea ar fi o funcție continuă de curbă, că lungimea segmentului $BC$ să fie 2 — lucru absurd.

Prin același „raționament" s-ar putea ajunge și la alte absurdități, de pildă, egalitatea dintre lungimea unei semicircumferințe și a diametrului ei. Cu toate acestea, din păcate, astfel de procedee sînt utilizate curent în geometrie cînd se definesc lungimea cercului, aria cilindrului, a conului, a sferei.

Pentru a găsi calea justă, trebuie să ne întoarcem la originea fizică, intuitivă, a noțiunilor pe care le studiem.

Cum procedează un măsurător de terenuri cînd are de măsurat lungimea unui drum? El urmărește linia mediană sau axa drumului. Dar această linie nu poate fi determinată cu precizie; ar fi, deci, greșit să pretindem că linia poligonală, pe care el o măsoară în realitate, este înscrisă în curba — linie mediană a drumului. Din nou ajungem la constatarea că nu trebuie să bazăm definiția lungimii unei curbe pe linii poligonale înscrise. Aceasta cu atît

mai mult, cu cît o măsurătoare, oricît de bună ar fi, nu poate distinge un punct din punctele situate la o anumită apropiere de el. Deci, niciodată n-am fi în stare să precizăm dacă două măsurători distincte s-au referit sau nu la aceeaşi linie poligonală înscrisă.

Se creează astfel impresia că nu există nici-o posibilitate de ieşire din încurcătură. Atît considerarea liniilor poligonale înscrise, cît şi a celor apropiate de curbă apar viciate.

Totuşi, calea justă trebuie căutată în considerarea liniilor poligonale apropiate, vecine de curbă. Unele dintre aceste linii poligonale ne-au pus în încurcătură, deoarece pot avea lungime oricît de mare. Să facem atunci o selecţie în familia şirurilor de linii poligonale care tind către curbă. Exemplul cu triunghiul echilateral, de mai sus, ne sugerează că în aproximarea unei curbe printr-o linie poligonală trebuie să evităm drumurile inutil complicate. Aceasta este, de altfel, în conformitate cu tehnica experimentală. Un măsurător de drumuri care pentru a măsura lungimea unui drum ar pune originea lanţului său pe marginea dreaptă a drumului, iar extremitatea lanţului pe marginea stîngă, apoi originea pe marginea stîngă, iar extremitatea pe marginea dreaptă ş.a.m.d. (fig. 8.III), un astfel de măsurător, spune Lebesgue, „n-ar lucra după regulile artei sale".

Or, tocmai astfel de „drumuri inutil complicate" reprezintă liniile poligonale cu care am încercat, mai sus (fig. 7.III), să aproximăm segmentul $BC$. De aici, eşecul încercării.

Problema este acum: care este instrumentul matematic cu ajutorul căruia putem împiedica şirurile de linii poligonale, inutil complicate, de a-şi exercita influenţa lor nefastă asupra definiţiei lungimii unei curbe? Pentru a găsi răspunsul la această întrebare, vom face o observaţie simplă, care este foarte bine ilustrată în fig. 2.III: dacă un număr $\lambda$ a fost obţinut ca limită a unui şir de lungimi de linii poligonale tinzînd către o curbă $\Gamma$, atunci orice număr superior lui $\lambda$ poate fi obţinut de asemenea ca o astfel de limită. Aceasta înseamnă că tota-

litatea numerelor care pot fi obținute în acest fel se reprezintă geometric printr-o semidreaptă nemărginită la dreapta. Cu cît un număr real $\lambda$ este situat mai la stînga, pe această semidreaptă, cu atît sînt mai scurte liniile poligonale care tind către curbă și ale căror lungimi tind către $\lambda$. Dacă notăm cu $L$ extremitatea din stînga a semidreptei (evident, $L$ este un număr pozitiv), rezultă că $L$ este limita lungimilor celor mai scurte linii poligonale posibile, care tind către curbă. Este natural ca $L$ să fie decretat lungimea curbei $\Gamma$. Prin definiție deci, lungimea unei curbe este cea mai mică valoare (se arată existența ei!) care se poate obține ca limită a unui șir de linii poligonale tinzînd către curbă.

Se poate întîmpla ca această „cea mai mică valoare“ să fie $+\infty$. În acest caz, curba nu are lungime finită. În cazul contrar, curba se numește rectificabilă.

Această noțiune de rectificabilitate, datorită lui Lebesgue, este echivalentă cu noțiunea de rectificabilitate în sensul lui Jordan, însă îi este superioară ca metodă acesteia din urmă, fiind mai apropiată de sensul intuitiv al noțiunii de lungime și putînd fi ușor transferată la aria suprafeței. Nu vom face aici această demonstrație. Vom remarca doar că jumătate din această echivalență este evidentă. În adevăr, lungimea în sensul lui Lebesgue este vizibil mai mică sau egală cu lungimea în sensul lui Jordan.

## CONVERGENȚĂ ÎN DISTANȚĂ ȘI CONVERGENȚĂ ÎN DIRECȚIE

Vom ajunge la înțelegerea acestei împrejurări fericite — echivalența celor două definiții ale lungimii — și pe o altă cale. Ne vom întoarce mult în urmă. Teoria lui Jordan a apărut la sfîrșitul secolului trecut. Nu trebuie însă să ne închipuim că pînă la Jordan matematicienii n-au fost în stare să dea o definiție noțiunii de lungime a unei curbe.

Pînă la Jordan se lucra cu definiţia următoare: lungimea unei curbe, date de

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

este

$$\int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Lebesgue observă că abia cu introducerea acestei definiţii analitice a lungimii unei curbe, împreună cu definiţia corespunzătoare pentru aria unei suprafeţe, s-a desăvîrşit acea operă care este, de obicei, pusă în întregime pe seama lui Descartes, opera de reducere a geometriei la algebră (algebra într-un sens larg, vechi, al cuvîntului, cuprinzînd deci şi analiza).

Definiţia (7) pentru lungimea unei curbe, datorită lui Cauchy, definiţie analitică, se referă la o clasă restrînsă de curbe. Dacă ţinem seamă că pe vremea lui Cauchy singurele funcţii integrabile erau cele continue (eventual cu un număr finit de puncte de discontinuitate), rezultă că, după această definiţie, numai curbele pentru care funcţiile $f$ şi $g$ au derivată continuă sînt înzestrate cu o lungime. Astfel de funcţii $f$ şi $g$ se numesc netede, iar despre curba corespunzătoare putem spune că este o curbă netedă.

Să facem cîteva observaţii — care ne vor fi utile – pe marginea definiţiei lui Cauchy.

Fiind dată o curbă netedă, parametrii directori ai tangentei la curbă sînt $f'(t)$ şi $g'(t)$. Din expresia (7) se observă că lungimea unei curbe netede este o funcţie continuă de $f'(t)$ şi $g'(t)$. Iată ce înţelegem prin aceasta: dacă ne dăm un $\varepsilon > 0$, atunci există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice curbă netedă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, pentru care

$$|f'(t) - \varphi'(t)| < \eta(\varepsilon), \quad |g'(t) - \psi'(t)| < \eta(\varepsilon),$$
$$(a \leqslant t \leqslant b), \tag{8}$$

avem

$$\left|\int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,\mathrm{d}t - \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon. \tag{9}$$

În adevăr, din inegalitatea $\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2} \leqslant \leqslant \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ rezultă:

$$\left| \int_a^b \left(\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} - \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^b \sqrt{[f'(t) - \varphi'(t)]^2 + [g'(t) - \psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t \right| \cdot$$

Deci, de îndată ce inegalitățile (8) au loc pentru $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$, se realizează inegalitatea (9). Aceasta înseamnă că lungimea unei curbe cu tangentă este o funcție continuă de direcția tangentei la curbă. Lungimea unei curbe cu tangentă încearcă o modificare oricît de mică dorim, cu condiția ca tangenta la curbă să nu-și modifice prea mult direcția.

Să revenim acum la exemplul ilustrat în fig 7.III. În acest exemplu nu este îndeplinită condiția de mai sus. În adevăr, fie un punct $M$ situat pe segmentul $BC$, astfel încît perpendiculara ridicată în $M$ pe $BC$ să întîlnească orice linie poligonală din șir într-un punct în care aceasta admite tangentă unică. Deoarece însă tangenta la o astfel de linie poligonală are mereu înclinarea $\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{2\pi}{3}$ radiani, cum, pe de altă parte, tangenta la $BC$ are în orice punct înclinarea zero, rezultă că liniile poligonale construite nu tind în direcție, ci doar în poziție, către segmentul de dreaptă $BC$[1].

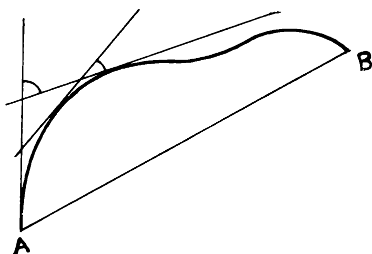



*Fig. 9, III.*

[1] A trebuit să luăm o anumită precauție în alegerea lui $M$, deoarece liniile poligonale nu sînt curbe netede. Ele se descompun într-un număr finit de curbe netede. Însă precauția poate fi înlăturată dacă lărgim puțin semnificația cuvintelor „tinde în direcție" și observăm că pentru un punct aparținînd unei linii poligonale din șir, laturile (sau latura) liniei poligonale care conțin acel punct au, în mod constant, înclinările $\frac{\pi}{3}$ sau $\frac{2\pi}{3}$ radiani.

Fie acum $\Gamma$ o curbă netedă. Fie $P$ o linie poligonală înscrisă în $\Gamma$. O latură $AB$ a lui $P$ face cu tangentele la $\Gamma$, în punctele arcului $AB$ al lui $\Gamma$, un unghi inferior celui mai mare unghi pe care-l fac între ele tangentele la $\Gamma$ în punctele arcului $AB$ (este suficient, pentru a ne da seama de aceasta, să facem uz de interpretarea geometrică a teoremei creșterilor finite; a se vedea fig. 9.III).

De aici rezultă că un șir $P_n$ de linii poligonale înscrise în curba $\Gamma$, astfel încît lungimea celei mai mari laturi a lui $P_n$ are ca limită pe zero, cînd $n \to \infty$, tinde către $\Gamma$ nu numai în poziție (adică în sensul distanței introduse mai sus) ci și în direcție. Aceasta înseamnă că în corespondența care se stabilește între $\Gamma$ și $P_n$ nu numai că distanța între două puncte corespondente $A \in \Gamma$, $A_n \in P_n$ este inferioară unui $\varepsilon_n > 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$), dar coeficientul unghiular al laturii lui $P_n$ (sau al fiecăreia dintre laturile lui $P_n$), care conține pe $A_n$, diferă și el de coeficientul unghiular al tangentei la $\Gamma$ în punctul $A$ printr-o cantitate inferioară unui $\eta_n$, care tinde la zero cînd $n \to \infty$[1].

În cazul circumferinței de pildă, luînd în rolul lui $P_n$ șirul obținut de poligoane regulate, punctul $A_n$ va fi situat la intersecția razei corespunzătoare punctului $A$ de pe circumferință cu linia poligonală $P_n$.

În general: dacă un șir de linii poligonale înscrise într-o curbă cu tangentă tinde în poziție către această curbă, atunci el tinde și în direcție către aceeași curbă. Aceasta explică succesul teoriei lui Jordan și, în particular, corectitudinea rezultatului în teoria elementară a lungimii cercului, teorie care, după cum am văzut, abundă în confuzii și inadvertențe.

Șirurile de linii poligonale care tind către o curbă, atît în poziție, cît și în direcție, realizează, implicit, dezideratul (formulat de Lebesgue) asupra evitării drumurilor inutil complicate. Această situație oglindește faptul experimental constatat în orice măsurătoare: linia poli-

---

[1] Este de la sine înțeles că pentru ca toate aceste considerații să aibă sens și să nu comporte complicații, vom exclude, cel puțin în această discuție, curbele $\Gamma$ care admit puncte singulare (în care $f'(t) = g'(t) = 0$). Considerațiile pe care le-am făcut se referă la curbe cu tangentă determinată.

gonală care înlocuiește curba, pentru cel care o măsoară, respectă, pe cît permite vederea omenească, direcția tangentei la curbă.

De ce atunci nu se definește lungimea unei curbe cu ajutorul liniilor poligonale ce o aproximează atît în poziție, cît și în direcție? Pentru curbe cu tangentă, acest mod de definire este nu numai corect, dar și cel mai indicat. Trebuie numai să demonstrăm că orice şir de linii poligonale care tinde către curbă, atît în poziție, cît și în direcție, furnizează aceeași limită pentru lungime. Aceasta se poate face fără mari complicații. Pentru curbe arbitrare însă, această definiție nu are sens. O curbă arbitrară, chiar simplă, poate să nu aibă tangentă în nici un punct. (Se știe, de pildă, că există funcții continue care nu sînt derivabile în nici un punct; graficul unei astfel de funcții este, deci, complet lipsit de tangentă).

Din cele văzute pînă acum rezultă că, în general, fiind dat un șir de curbe $\{\Gamma_n\}$ care tinde către o curbă $\Gamma$, șirul $\{l(\Gamma_n)\}$ nu tinde către $l(\Gamma)$. Este lesne de înțeles că șirurile $\{\Gamma_n\}$ de curbe rectificabile pentru care $l(\Gamma_n) \to l(\Gamma)$, cînd $n \to \infty$, $\Gamma$ fiind curba limită, prezintă un deosebit interes. Aceste șiruri au condus la o noțiune nouă de convergență, numită convergența în lungime. Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții continue și cu variație mărginită pe $[a, b]$, uniform convergent pe $[a, b]$. Șirul de curbe rectificabile

$$\Gamma_n : \begin{cases} x = t, \\ y = f_n(t), \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

tinde către curba $\Gamma$, dată de $x = t$, $y = f(t)$, $f$ fiind limita șirului $f_n$. Să presupunem că $f$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Spunem că șirul de funcții $\{f_n\}$ converge în lungime către funcția $f$ pe segmentul $[a, b]$, dacă $l[\Gamma_n]$ tinde către $l(\Gamma)$, atunci cînd $n \to \infty$. Se poate arăta că o condiție suficientă ca $\{f_n\}$ să conveargă în lungime către $f$ este ca variația totală a funcției $f_n - f$ pe $[a, b]$ să tindă la zero, cînd $n \to \infty$.

Mai general, fiind date reprezentările parametrice

$$R_n : \begin{cases} x = f_n(t), \\ y = g_n(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

astfel încît şirul $f_1, f_2, f_3, \ldots$ tinde uniform pe $[a, b]$ către $f_0$, şirul $g_1, g_2, g_3, \ldots$ tinde uniform pe $[a, b]$ către $g_0$, iar $f_n$ şi $g_n$ sînt funcţii continue şi cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, observăm că şirul de curbe $\{\Gamma_n\}$ definite de $\{R_n\}$ tinde către curba $\Gamma_0$ definită de $R_0$. Vom spune despre acest şir de reprezentări parametrice că converge în lungime pe $[a, b]$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} l(\Gamma_n) = l(\Gamma_0)$.

Se poate arăta că dacă şirul $R_n$ converge în lungime către $R_0$, atunci şirul $f_n$ converge în variaţie către $f_0$, iar şirul $g_n$ converge în variaţie către $g_0$, pe $[a, b]$, înţelegînd prin aceasta că

$$\lim_{n\to\infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_n) = \overset{b}{\underset{a}{V}} (f_0), \quad \lim_{n\to\infty} \overset{b}{\underset{a}{V}} (g_n) = \overset{b}{\underset{a}{V}} (g_0).$$

## REPREZENTAREA INTEGRALĂ A LUNGIMII UNEI CURBE

Definiţia dată de Cauchy lungimii unei curbe cu tangentă variind continuu merită, cu tot domeniul ei restrîns de valabilitate, să mai facă obiectul atenţiei noastre. Pentru a-i înţelege mai bine semnificaţia, să arătăm mai întîi că definiţia lui Jordan conduce — pentru curbe netede — la expresia integrală a lui Cauchy. Fie deci curba $\Gamma$, dată de (1), cu $f'(t)$ şi $g'(t)$ continue pe $[a, b]$.

Fie $\pi$ o linie poligonală înscrisă în $\Gamma$, indusă de o diviziune

$$\Delta = (a = t_0 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b).$$

Lungimea lui $\pi$ este dată de

$$l(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 + [g(t_{i+1}) - g(t_i)]^2}$$

sau încă, în virtutea teoremei creşterilor finite,

$$l(\pi) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i)}$$

$$(t_i \leqslant \xi_i \leqslant t_{i+1}), \ (t_i \leqslant \eta_i \leqslant t_{i+1}).$$

Este ușor de verificat că

$$\left|\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\eta_i)}-\sqrt{f'^2(t_i)+g'^2(t_i)}\right| \leqslant |f'(\xi_i)-f'(t_i)|+ \\ +|g'(\eta_i)-g'(t_i)|,$$

deci

$$\left| l(\pi)-\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t_i)+g'^2(t_i)}\right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(t_{i+1}-t_i)+\sum_{i=0}^{n-1}(M'_i-m'_i)(t_{i+1}-t_i), \tag{10}$$

unde $M_i$, $m_i$, $M'_i$, $m'_i$ sînt marginile funcțiilor $f'$ și $g'$ pe $[t_i, t_{i+1}]$.

În virtutea continuității uniforme a derivatelor $f'$ și $g'$ pe $[a, b]$, membrul din dreapta este inferior unui $\varepsilon > 0$ dat, cu condiția ca norma diviziunii $\Delta$ să fie suficient de mică. Deci membrul din stînga din (10) tinde la zero pentru orice șir de diviziuni $\Delta_n$ de normă tinzînd la zero. De aici rezultă

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Am desfășurat, în mod intenționat, toate detaliile demonstrației. O privire superficială asupra acestei demonstrații lasă impresia că intervenția continuității derivatelor este esențială. O analiză atentă pune însă în evidență un fapt care reabilitează aproape în întregime definiția lui Cauchy: expresia integrală a lungimii este valabilă pentru o clasă mult mai largă de curbe rectificabile decît clasa curbelor netede, cu condiția să lucrăm cu o noțiune mai generală de integrabilitate.

Iată acum etapele prin care a ajuns știința la acest rezultat. Mai întîi, Riemann a generalizat noțiunea de integrabilitate, efectuînd următoarea construcție: fie pentru orice diviziune $\Delta=(a=t_0<\ldots<t_i<t_{i+1}<\ldots<t_n=b)$ și pentru $f$, definită pe $[a, b]$, expresia

$$\sigma(\Delta)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(t_{i+1}-t_i), \qquad (t_i\leqslant\xi_i\leqslant t_{i+1}).$$

Fie $\nu(\Delta)$ norma lui $\Delta$. Dacă există un număr $I$, astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina un $\eta > 0$, cu proprietatea că de îndată ce $\nu(\Delta) < \eta$, avem

$$|\sigma(\Delta) - I| < \varepsilon,$$

oricare ar fi alegerea valorilor $\xi_i$ în $[t_i, t_{i+1}]$, atunci $f$ este integrabilă în sens Riemann pe $[a, b]$, integrala lui $f$ pe $[a, b]$ fiind $I$. Darboux a construit aceeași integrală pe o altă cale, și anume: fie o funcție $f$ mărginită pe $[a, b]$. Fie $m_i$, $M_i$ marginile lui $f$ pe $[t_i, t_{i+1}]$. Fie

$$s(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i), \quad S(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i),$$

avem

$$s(\Delta) \leqslant S(\Delta).$$

Se poate arăta că o condiție necesară și suficientă ca $f$ să fie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este ca, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, să se poată determina o diviziune $\Delta$ a lui $[a, b]$, astfel încît $S(\Delta) - s(\Delta) < \varepsilon$. De aici rezultă, ținînd seama că în membrul al doilea din (10) se află tocmai diferența $S$—s, referitoare întîi la $f'$, apoi la $g'$, că relația (11) este valabilă ori de cîte ori derivatele $f'$ și $g'$ sînt integrabile Riemann. Această formulare poate să pară curioasă acelor cititori care nu sînt obișnuiți să lucreze cu funcții integrabile, altele decît cele continue. Pentru funcțiile continue, nu distingem între existența primitivei și existența integralei. O funcție continuă este în același timp integrabilă și derivată. Există însă derivate mărginite care nu sînt integrabile Riemann. Matematicianul român D. Pompeiu a definit o întreagă clasă de funcții a căror derivată este mărginită, dar neintegrabilă Riemann. Așadar, expresia „derivată integrabilă Riemann“ nu este un pleonasm. Nu mai insistăm aici asupra acestor lucruri, deoarece integrala Riemann este reluată și discutată amănunțit în capitolul IV.

Dar lucrurile nu s-au oprit aici. Lebesgue a avut ideea de a controla dacă nu cumva derivabilitatea funcțiilor $f$ și $g$ nu rezultă din însăși structura unei curbe rectificabile. Lebesgue a demonstrat că dacă $f$ și $g$ sînt funcțiile care dau reprezentarea parametrică a unei curbe rectificabile, atunci $f$ și $g$ sînt derivabile în fiecare punct, exceptînd eventual o mulțime de măsură nulă de puncte. (O mulțime de puncte de pe dreaptă este de măsură nulă dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ se poate găsi o familie cel mult numărabilă de intervale de lungime totală mai mică decît $\varepsilon$, și astfel încît orice punct al mulțimii să fie conținut într-un interval al familiei.) Tot Lebesgue a introdus o noțiune nouă de integrabilitate, care-i poartă numele, și care permite integrarea oricărei derivate dintr-o funcție care intră în reprezentarea parametrică a unei curbe rectificabile. Această noțiune de integrabilitate nici nu cere funcției care se integrează pe $[a, b]$ să fie definită pe tot $[a, b]$; ea poate să nu fie definită pe o mulțime de măsură nulă de puncte (așa cum se întîmplă de fapt, în general, cu derivatele funcțiilor $f$ și $g$ de mai sus).

Nu putem da aici definiția constructivă a integralei lui Lebesgue (ea va fi prezentată în capitolul IV). Vom da însă o definiție descriptivă a acestei integrale, definiție echivalentă cu cea constructivă. Dar mai întîi, o definiție pregătitoare.

O funcție $\varphi$ definită pe $[a, b]$ este absolut continuă pe $[a, b]$, dacă fiecărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde un $\eta > 0$, astfel încît dacă $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots (a_n, b_n)$ formează un sistem finit de intervale disjuncte din $[a, b]$, cu $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \eta$, atunci $\sum_{i=1}^{n} f(b_i) - f(a_i) < \varepsilon$.

Se poate arăta că orice funcție absolut continuă pe $[a, b]$ este continuă și cu variație mărginită pe $[a, b]$. Reciproca, însă, nu este adevărată.

Orice funcție cu derivată mărginită pe $[a, b]$ este absolut continuă pe $[a, b]$.

Spunem că funcţia $f$, definită pe $[a, b]$, este integrabila Lebesgue pe $[a, b]$, dacă există o funcţie $F$ absolut continuă pe $[a, b]$ şi o mulţime $E$, de măsură nulă, din $[a, b]$, astfel încît $F'(t) = f(t)$, pentru orice $t$ din $[a, b]$ care nu aparţine mulţimii $E$. Numărul $F(b) - F(a)$ se numeşte integrala în sensul lui Lebesgue a funcţiei $f$ de la $a$ la $b$.

Se constată uşor că integrala Riemann, ca funcţie de limita superioară de integrare, este absolut continuă. Pe de altă parte, în orice tratat de analiză se arată că

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

are ca derivată, în orice punct $x_0$ în care $f(t)$ este continuă, chiar pe $f(x_0)$. Deoarece am semnalat mai sus că o funcţie integrabilă Riemann este continuă în fiecare punct, cu excepţia unei mulţimi de puncte de măsură nulă , rezultă că o funcţie integrabilă Riemann este integrabilă Lebesgue, şi valorile celor două integrale coincid.

S-ar putea pune problema dacă integrala Lebesgue a unei funcţii este unic determinată de această funcţie. Răspunsul este afirmativ, deoarece se poate demonstra că dacă două funcţii absolut continue au în fiecare punct, exceptînd o mulţime de măsură nulă, aceeaşi derivată, atunci ele diferă printr-o constantă.

Iată acum formularea rezultatelor care încoronează consideraţiile privitoare la reprezentarea integrală a lungimii unei curbe:

Pentru orice curbă rectificabilă (dată de (1)) derivatele funcţiilor $f$ şi $g$, ca şi expresia $\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}$, sînt integrabile în sensul lui Lebesgue pe $[a, b]$. În general, avem

$$l(\Gamma) \geqslant \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, \mathrm{d}t, \qquad (12)$$

integrala fiind luată în sensul lui Lebesgue. Necesar şi suficient ca în (12) să apară semnul = este ca $f$ şi $g$ să fie funcţii absolut continue pe $[a, b]$.

Acum se explică din ce cauză pentru curbe date de funcţii $f$ şi $g$, cu derivate integrabile Riemann, avem relaţia (11). Astfel de funcţii sînt absolut continue, deci intră exact în cazul în care relaţia (12) devine o egalitate.

## LUNGIMEA UNEI CURBE, CA FUNCȚIONALĂ INFERIOR SEMICONTINUĂ ÎN SPAȚIUL CURBELOR. PUNCTUL DE VEDERE AL LUI FRÉCHET

Se spune uneori că definițiile sînt libere. Noi n-am adoptat aici această concepție și am căutat să justificăm alegerea fiecărei definiții. Vom prezenta acum un alt aspect, pus în evidență de Maurice Fréchet, al noțiunii de lungime a unei curbe, așa cum a fost ea definită de Lebesgue. Prezentarea lui Fréchet înlătură orice element arbitrar care ar mai putea fi atribuit definiției date de Lebesgue.

Să considerăm mulțimea $C$ a tuturor curbelor definite de (1) cu $f$ și $g$ continue pe $[a, b]$. Vom numi $C$ spațiul curbelor. Datorită definițiilor introduse pînă aici, știm ce trebuie să înțelegem prin afirmația: „Un șir de curbe $\{\Gamma_n\}$ tinde în poziție către curba $\Gamma$".

Să presupunem acum că definim pe spațiul $C$ o funcție reală $\varphi$. Deci fiecărei curbe $\Gamma \in C$ i se asociază, în mod univoc, un număr real $\varphi(\Gamma)$. (Admitem și posibilitatea ca $\varphi(\Gamma)$ să fie infinit.) Funcția $\varphi$ se numește o funcțională definită pe spațiul $C$. Curbele $\Gamma$ vor fi numite „puncte" ale spațiului $C$.

Vom spune că funcționala $\varphi$ este continuă în punctul $\Gamma$, dacă $\varphi(\Gamma_n) \to \varphi(\Gamma)$ de îndată ce $\Gamma_n$ tinde în poziție către $\Gamma$. Să presupunem că $\varphi$ este funcționala definită de lungimea curbei $\Gamma$. $\varphi$ este, în acest caz, o funcțională nenegativă definită pe $C$, dar din cele arătate în acest capitol rezultă că această funcțională nu este continuă în nici un punct din $C$.

Pentru a putea caracteriza lungimea lui $\Gamma$, ca funcțională definită pe $C$, vom recurge la o noțiune mai slabă decît continuitatea, anume la noțiunea de semicontinuitate. Funcționala $\varphi$, definită pe $C$, este inferior (respectiv, superior) semicontinuă în punctul $\Gamma \in C$, dacă pentru orice șir $\Gamma_n \to \Gamma$, pentru care există $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\Gamma_n)$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\Gamma_n) \geqslant \varphi(\Gamma) \text{ (respectiv } \lim_{n\to\infty} \varphi(\Gamma_n) \leqslant \varphi(\Gamma)). \quad (13)$$

Este vizibil că o funcţională inferior şi superior semicontinuă în punctul Γ este pur şi simplu continuă în punctul Γ şi reciproc [1].

Forma (13) a definiţiei semicontinuităţii este cea mai convenabilă în problema care ne interesează, pentru că ea pune în evidenţă următorul fapt, deosebit de important: funcţionala care defineşte lungimea unei curbe (a se vedea varianta Lebesgue) este o funcţională inferior semicontinuă în fiecare punct din spaţiul $C$. (Putem considera că această funcţională este definită pe tot spaţiul $C$, deoarece orice curbă are lungime, finită sau infinită, şi pe de altă parte, am acceptat pentru $\varphi$ şi valori infinite.)

În spaţiul $C$ există unele „puncte" care atrag în mod deosebit atenţia: sînt punctele Γ care reprezintă un caz particular de curbe, anume liniile poligonale. Să notăm cu $P$ mulţimea acestor puncte din $C$. Avem $P \subset C$. Funcţionala $\varphi$ prezintă o situaţie specială pe $P$, prin faptul că pe $P$, $\varphi$ coincide cu lungimea definită pe cale elementară, ca suma lungimilor segmentelor care compun linia poligonală respectivă. Putem spune deci:

Lungimea unei curbe este o funcţională nenegativă, inferior semicontinuă pe $C$ şi care se reduce pe $P \subset C$ la lungimea în sens elementar.

Problema definirii lungimii unei curbe apare, astfel, ca o problemă de extensiune, de prelungire a unei funcţionale definite pe $P$, la o funcţională definită pe $C$, prelungire care să se facă cu respectarea anumitor cerinţe intuitive fundamentale, legate de noţiunea de lungime. Meritul lui Lebesgue este de a fi identificat o astfel de cerinţă şi de a o fi reflectat în proprietatea corespunzătoare semicontinuităţii inferioare, proprietate care constituie însăşi esenţa definiţiei pe care el a pus-o.

Se poate demonstra că lungimea liniilor poligonale, definită elementar ca sumă a lungimilor segmentelor care compun o astfel de linie, este o funcţională inferior semicontinuă pe $P$. În felul acesta, semicontinuitatea

---

[1] De obicei, definiţia semicontinuităţii nu se formulează ca mai sus, ci într-o altă variantă, echivalentă cu cea dată aici.

inferioară a lungimii pe $C$, semicontinuitate care rezultă fără dificultăţi din definiţia lui Lebesgue, prelungeşte o proprietate a lungimii liniilor poligonale.

Acest procedeu de „prelungire" nu este întîlnit aici pentru prima dată. Pentru definirea măsurii unui segment se defineşte mai întîi măsura segmentelor comensurabile cu unitatea de lungime, apoi se impune măsurii segmentelor oarecare condiţia de a fi o funcţie continuă, egală, pentru segmente comensurabile, cu măsura deja definită. Schema comună tuturor acestor cazuri este: Se prelungeşte o funcţie de la un cîmp dat la altul, mai vast, prin construcţia unei funcţii egale cu funcţia dată pe cîmpul dat şi păstrînd pe cîmpul mai întins unele proprietăţi, pe care le socotim mai importante, ale funcţiei date.

În legătură cu ultima formă pe care am dat-o definiţiei lungimii unei curbe, se ridică următoarea problemă: Este adevărată afirmaţia reciprocă, anume că orice funcţională nenegativă, inferior semicontinuă pe $C$, care se reduce pe $P \subset C$ la lungimea în sens elementar, este însăşi funcţionala care furnizează lungimea curbelor $\Gamma \in C$?

Fréchet a observat că răspunsul la această întrebare este negativ şi şi-a pus problema de a caracteriza, în mulţimea funcţionalelor cu proprietăţile arătate, definite pe $C$, pe aceea care furnizează lungimea. El a reuşit să rezolve această problemă, demonstrînd că dintre toate funcţionalele $\varphi$ inferior semicontinue pe $C$, reducîndu-se la lungimea obişnuită pe $P$, funcţionala $l$, care dă lungimea curbelor, este cea mai puţin discontinuă, în sensul că are în fiecare punct oscilaţia „cea mai mică". Deoarece limita superioară a oricărei funcţionale $\varphi$ cu proprietăţile arătate este, în fiecare punct din $C$, egală cu $\infty$, condiţia găsită de Fréchet revine la inegalitatea $l(\Gamma) \geqslant \varphi(\Gamma)$ pentru orice $\varphi$ şi orice $\Gamma \in C$. Pentru a o demonstra, este suficient să observăm că există un şir $(\pi_n)$ de puncte din $P$, astfel încît $\lim_{n \to \infty} \pi_n = \Gamma$ şi $l(\pi_n) \to l(\Gamma)$. Pe de altă parte, avem $\varphi(\pi_n) = l(\pi_n)$, deci limita inferioară a funcţiei $\varphi$ în punctul $\Gamma$ este mai mică sau egală cu $l(\Gamma)$ şi, ca urmare a semicontinuităţii inferioare, $\varphi(\Gamma) \leqslant l(\Gamma)$.

Să dăm acum un exemplu de funcție $\varphi$ inferior semicontinuă pe $C$, care se reduce pe $P$ la lungimea obișnuită și care nu coincide pe $C$ cu lungimea Lebesgue.

Să considerăm mulțimea $S \subseteq C$ formată din toate semicircumferințele de rază egală cu unitatea. Funcția $\varphi$, egală pe $C - S$ cu lungimea Lebesgue și egală pe $S$ cu jumătate din lungimea Lebesgue, îndeplinește condițiile dorite.

# IV

## Itinerar în teoria integralei

### INTRODUCERE

Una dintre problemele care i-a frămîntat pe matematicieni din cele mai vechi timpuri este aceea a determinării ariei unei porțiuni din plan. Forma cea mai simplă a acestei probleme este aceea a determinării ariei pătratului de latură 1. Se convine a se considera că aria unui astfel de pătrat este egală cu 1. Sensul acestei afirmații este următorul: dacă latura unui pătrat este de 1 cm, atunci aria lui este de 1 cm². Cu alte cuvinte, ne alegem drept unitate de măsură pentru arii aria unui pătrat a cărui latură este unitatea de lungime. O problemă care se rezolvă pe o cale destul de elementară pentru a o putea aborda încă în școala elementară este aceea a determinării ariei unui dreptunghi ale cărui laturi se exprimă prin numere raționale. Urmează apoi o problemă care prezintă un salt calitativ față de problema precedentă: aceea a determinării ariei unui pătrat a cărui latură nu se mai exprimă printr-un număr rațional. Aici, metodele matematicii elementare se dovedesc neputincioase. Pentru a determina aria unui astfel de pătrat este nevoie de o operație nouă, specifică analizei matematice: operația de trecere la limită. Într-adevăr, dacă latura unui pătrat se exprimă printr-un număr $a$ incomensurabil (adică irațional), se poate determina, prin însăși definiția acestor numere, un șir de numere raționale $a_n$ astfel încît $\lim a_n = a$. Aria pătratului de latură $a$ va fi tocmai limita șirului $a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2, \ldots$ După cum vedem, posibilitatea de a determina aria oricărui pătrat este intim legată de cunoașterea noțiunii de număr real, în toată generalitatea

ei. În mod asemănător se determină și aria unui dreptunghi pentru care cel puțin una din laturi se exprimă printr-un număr irațional. Cunoscînd aria unui dreptunghi, putem determina imediat aria oricărui triunghi, deci și aria oricărui poligon, deoarece un poligon se descompune într-un număr finit de triunghiuri.

Am trecut în fugă peste toate aceste lucruri, pentru că ele ne sînt binecunoscute încă din școala medie, unele dintre ele chiar din școala elementară.

Acest mod de a studia aria unui poligon urmează oarecum calea istorică, adică reproduce, într-o formă sintetică, etapele istorice prin care a trecut cunoașterea noțiunii de arie pentru poligoane. Însă, atunci cînd oamenii au acumulat o experiență destul de îndelungată în problema determinării ariei, toate considerațiile acceptate de foarte multă vreme și intrate oarecum în obișnuința de fiecare zi a matematicienilor au început să fie supuse unui riguros examen critic. S-a pus problema solidității, din punct de vedere logic, a cunoștințelor noastre despre aria unui poligon.

În teoria clasică a ariei, noțiunea de arie a unui poligon este considerată cunoscută și se pune doar problema determinării numerice a ariei. Mai mult decît atît, sînt admise o seamă de proprietăți fundamentale ale ariei, de exemplu: pătratul de latură 1 are aria egală cu 1; două poligoane egale au aceeași arie; dacă poligonul $P$ este reuniunea a două poligoane $p'$ și $p''$, fără puncte interioare comune, atunci aria lui $P$ este egală cu suma dintre aria lui $p'$ și aria lui $p''$.

Desigur că în postularea existenței ariei pentru orice poligon, cît și în postularea proprietăților de mai sus ale ariei nu trebuie să vedem un act arbitrar al unor matematicieni. Astfel de postulate nu fac decît să sintetizeze niște observații pe care oamenii le-au efectuat de miliarde și miliarde de ori. Aceste postulate sînt foarte prețioase, pentru că prin ele se întreține, în bună măsură, contactul matematicii cu natura, cu realitatea vie, cu experiența și practica milenară a oamenilor. Se poate totuși pune problema dacă postulatele au fost bine alese, cu alte cuvinte dacă ele exprimă corect și complet conținutul real, intuitiv,

pe care sînt chemate să-l oglindească. Din acest punct de vedere, s-au mai adus uneori — și poate se vor mai aduce și în viitor — unele modificări, de detaliu, postulatelor de mai sus.

## CUM DETERMINĂM ARIA UNEI FIGURI MAI COMPLICATE?

Să încercăm să determinăm aria unei porțiuni din plan mai complicată decît un poligon. Aceasta înseamnă că porțiunea considerată nu este delimitată numai de segmente de dreaptă, ci și de arce de curbă. Această problemă nu este chiar așa de nouă; am mai întîlnit-o atunci cînd am determinat aria unui cerc. Totuși, dacă cineva ne-ar cere să transpunem metoda de acolo în alte cazuri, de pildă să determinăm cu ajutorul ei aria unei elipse, ne-am găsi într-o încurcătură foarte mare. Oricît de bine am cunoaște procedeul de determinare a ariei unui cerc, încercarea de a transpune acest procedeu la elipsă nu va reuși, deoarece el utilizează proprietăți caracteristice ale cercului, proprietăți pe care elipsa nu le are. Într-adevăr, elipsa nu mai poate fi aproximată oricît de bine cu poligoane regulate.

Dificultatea pe care am întîlnit-o mai sus este caracteristică pentru o întreagă perioadă, foarte lungă, de dezvoltare a teoriei ariei. Un timp foarte îndelungat, matematicienii știau să determine, prin diverse mijloace, aria anumitor figuri particulare, dar nu reușeau să elaboreze o metodă generală, un procedeu uniform de determinare a ariei oricărei porțiuni din plan, adică un procedeu care să nu angajeze particularitățile figurii. Un exemplu celebru în acest sens este modul în care marele matematician al Greciei antice, Arhimede, determina aria unui segment de parabolă. Să considerăm arcul de parabolă $ACB$ (vezi fig. 1.IV) de ecuație $y^2 = x$.

Fie $AA'B'BA$ dreptunghiul construit, așa cum se vede în figură. Fie $a_1$ aria triunghiului $ABC$. Fie $D'$ și $E'$ mijloacele laturilor $AC$ și $BC$. Fie $D$ și $E$ punctele de intersecție cu parabola ale paralelelor prin $D'$ și $E'$ la $CC'$. Fie $a_2$ suma ariilor triunghiurilor $ACD$ și $BCE$.

În cele patru segmente parabolice rămase construim, după același procedeu, patru triunghiuri și notăm cu $a_3$ suma ariilor acestor patru triunghiuri. Continuînd astfel, observăm că suma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ se apropie

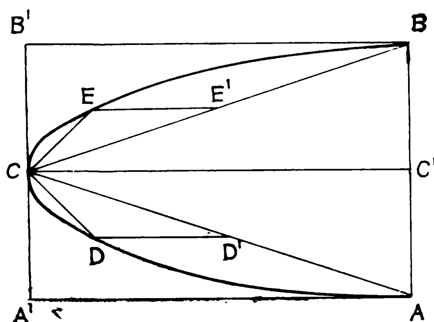



*Fig. 1.IV*

cu atît mai mult de aria $a$ a segmentului parabolic (cuprins între arcul $ACB$ și coarda $AB$) cu cît $n$ este mai mare. Avem deci:

$$a = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Însă avem $DD' = EE' = \frac{CC'}{4}$, deoarece $DD'$ este diametrul conjugat direcției $AC$, iar $EE'$ este diametrul conjugat direcției $BC$. Pe de altă parte, raportul dintre aria triunghiului $ACD$ și aria triunghiului $ACC'$ este egal cu raportul înălțimilor. Deducem deci:

$$a_2 = \frac{a_1}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2}{4}, \ldots, a_{n+1} = \frac{a_n}{4}, \ldots,$$

de unde

$$a = a_1 + \frac{a_1}{4} + \frac{a_1}{4^2} + \frac{a_1}{4^3} + \ldots + \frac{a_1}{4^n} + \ldots = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4a_1}{3},$$

deci aria segmentului parabolic cuprins între arcul *ADCEB* și coarda *AB* este egală cu două treimi din aria dreptunghiului *AA'B'BA*.

Ingeniozitatea procedeului de mai sus nu poate fi contestată. Totuși, caracterul foarte special, atît de legat de particularitățile parabolei, face ca el să nu poată fi extins și la alte cazuri.

## DE LA ARHIMEDE LA CAVALIERI

Este interesant că Arhimede a găsit încă două procedee de determinare a ariei unui segment de parabolă. Unul dintre ele constă în a reduce problema la aceea a determinării centrului de greutate al unui triunghi, segmentul de parabolă fiind asimilat cu o sumă infinită de segmente de dreaptă paralele cu axa.

Tot Arhimede a determinat aria porțiunii limitată de spirala care-i poartă numele (a cărei ecuație este $\rho = C\omega$), iar înaintea sa Eudox determinase volumul piramidei și al conului, ale căror formule fuseseră date, fără demonstrație, de Democrit. Antichitatea greacă a cunoscut de asemenea modul de determinare a lungimii cercului, a ariei unui segment sferic, ca și a momentelor statice. Toate aceste probleme erau puse de geometrie și de statică, științe relativ mai dezvoltate în această epocă. Aceste determinări făcute de cei mai străluciți matematicieni ai Greciei antice conțin, fără îndoială, germenele a ceea ce avea să se numească mai tîrziu „calculul integral“. În nici un caz însă nu putem vorbi de un calcul integral în antichitate. O trăsătură caracteristică a calculului integral este sesizarea faptului că o seamă de determinări de arii, volume, momente, în ciuda diversității pe care o prezintă ele din punctul de vedere al naturii mărimilor respective, conduc la una și aceeași problemă matematică, la una și aceeași schemă. De exemplu, problema determinării volumului piramidei, rezolvată de Eudox, a determinării ariei unui segment de parabolă, a centrului de greutate a unui triunghi și a ariei unei spirale, rezolvate de Arhimede, se reduc, toate la determinarea limitei unei sume de forma $\xi_1^2 +$

$+ \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ atunci cînd $n$ tinde la infinit, cu alte cuvinte, în notația și limbajul de astăzi, toate cele patru probleme de mai sus se reduc la calculul unei integrale de forma

$$\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x.$$

Or, tocmai conștiința acestei analogii le lipsea matematicienilor din antichitate. Separarea formei de conținut s-a dovedit a fi un proces istoric foarte lent, în care progresele au venit încetul cu încetul.

După lunga perioadă de amorțire, de stagnare a științei, caracteristică evului mediu, procesul de cristalizare a noțiunii de integrală avea să cunoască un progres esențial abia la sfîrșitul secolului al XVI-lea și, mai ales, în secolul al XVII-lea. În această perioadă, se stabilesc procedee de determinare a ariei unei suprafețe de revoluție și, sub impulsul lucrărilor lui Huygens asupra pendulului compus, se calculează pentru prima oară momente de inerție. Acum situația era coaptă pentru ca matematicienii să înceapă să vadă legătura între toate aceste probleme de geometrie și de mecanică. Pentru arii și volume, această analogie este pusă în evidență cu o deosebită pregnanță, în prima jumătate a secolului al XVII-lea, de către Cavalieri în a sa *Geometrie a indivizibilelor*. Cavalieri enunță și încearcă să stabilească principiul următor: „Dacă două arii plane sînt astfel încît orice paralelă la o direcție dată le taie după segmente ale căror lungimi sînt într-un raport constant, atunci aceste arii sînt în același raport". Un principiu analog este enunțat pentru „volumele tăiate de planele paralele cu un plan fix după arii ale căror măsuri sînt într-un raport constant". În absența unui limbaj matematic adecvat, Cavalieri exprimă aici într-un mod necorespunzător o observație corectă: „Fie două arii, una definită de inegalitățile

$$0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x),$$

iar cealaltă definită de inegalitățile

$$0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant g(x).$$

Sumele de ordonate

$$f(0) + f\left(\frac{a}{n}\right) + f\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)$$

$$g(0) + g\left(\frac{a}{n}\right) + g\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{(n-1)a}{n}\right),$$

sînt, una faţă de alta, într-un raport care, pentru $n$ destul de mare, se apropie oricît de mult de raportul celor două arii". Cavalieri trece la limită pentru $n \to \infty$ şi spune că suma tuturor ordonatelor primei curbe este, faţă de suma tuturor ordonatelor celei de a doua curbe, într-un raport riguros egal cu raportul ariilor.

### UN ALT MOD DE A DETERMINA ARIA UNUI SEGMENT DE PARABOLĂ

Să ne întoarcem din nou la problema determinării ariei unui segment de parabolă şi să încercăm s-o rezolvăm pe o cale care să angajeze cît mai puţin particularităţile acestei curbe. Fie deci parabola de ecuaţie $y = x^2$. Aria porţi-

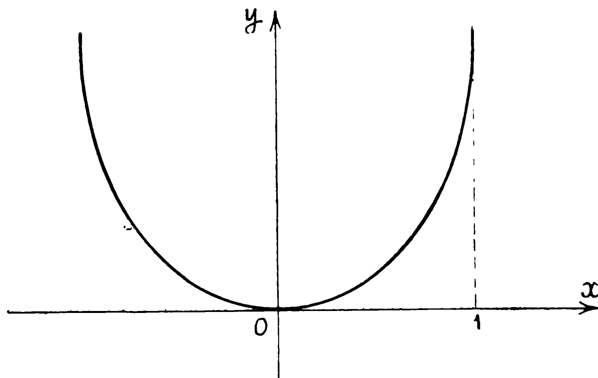



*Fig. 2.IV*

unii cuprinse în interiorul acestei parabole este, evident, infinită. Să limităm atunci această porţiune cu ajutorul unei drepte, de exemplu, dreapta de ecuaţie $x = 1$ (vezi fig 2.IV).

Însă, datorită simetriei parabolei, considerate în raport cu axa $Ox$, va fi suficient să calculăm aria porţiunii cuprinse între ramura superioară a parabolei axa $Ox$ şi dreapta $x = 1$. Dublînd rezultatul obţinut, vom obţine aria întregii porţiuni. În felul acesta, problema s-a redus la aceea a determi-

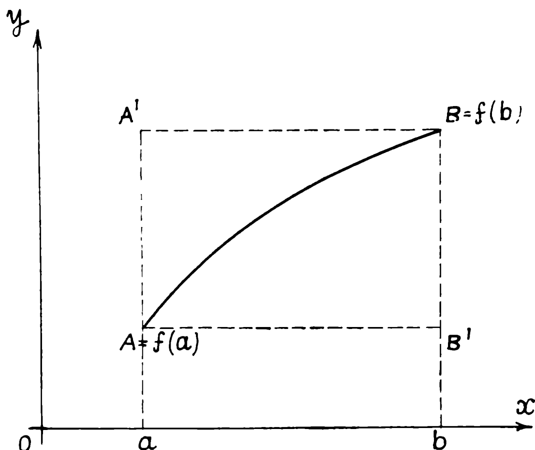



*Fig. 3.IV*

nării ariei porţiunii delimitate de graficul funcţiei $f(x) = x^2$, axa $Ox$ şi dreapta $x = 1$. Funcţia $f(x) = x^2$ este crescătoare şi pozitivă pe intervalul $[0, 1]$. Problema pe care trebuie s-o rezolvăm este deci un caz particular al următoarei probleme: fie $f(x)$ o funcţie pozitivă şi crescătoare pe intervalul $[a, b]$. Să determinăm aria $\alpha$ a porţiunii din plan cuprinse între graficul funcţiei $f(x)$, axa $Ox$ şi dreptele $x = a$ şi $x = b$ (vezi fig. 3. IV).

Într-o primă aproximaţie, am putea lua drept arie a porţiunii considerate aria unuia dintre dreptunghiurile $AabB'$ şi $A'Bba$ (vezi fig. 3. IV).

Eroarea pe care o comitem în această aproximare a ariei este inferioară diferenţei ariilor celor două dreptunghiuri, diferenţa egală cu

$$(f(b) - f(a))(b - a).$$

Această majorare a erorii nu este însă satisfăcătoare, deoarece ea nu este la dispoziţia noastră. Atît mărimea $b - a$, cît şi $f(b) - f(a)$ depind de datele problemei, deci de aceste date ale problemei şi nu de noi depinde faptul dacă eroarea comisă este, de pildă, mai mică sau nu decît $10^{-2}$. Este firesc atunci să împărţim intervalul $[a, b]$ în intervale parţiale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots x_n = b,$$

şi să considerăm drept valoare aproximativă a ariei $\alpha$ suma $s$ a ariilor dreptunghiurilor avînd bazele egale cu $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $x_{i+1} - x_i$, ..., $x_n - x_{n-1}$ şi înălţimile egale, respectiv, cu $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_i)$, ..., $f(x_{n-1})$.

Este uşor de văzut că

$$\alpha - s \leqslant (f(x_1) - f(a))(x_1 - a) + (f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) + \\ + \dots + (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) + \dots + \\ + (f(b) - f(x_{n-1}))(b - x_{n-1}).$$

Să presupunem acum că dorim ca eroarea $\alpha - s$ să nu depăşească numărul $10^{-2}$. Pentru a realiza aceasta, vom alege punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ destul de apropiate pentru ca fiecare dintre diferenţele

$$f(x_1) - f(a),\ f(x_2) - f(x_1),\ \dots,\ f(x_{i+1}) - f(x_i),\ \dots,\\ f(b) - f(x_{n-1}),$$

să fie inferioară lui $10^{-2}/(b - a)$. În acest fel obţinem

$$\alpha - s \leqslant \frac{10^{-2}}{b-a}[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{i-1} - x_i) + \\ + \dots + (b - x_{n-1})] = \frac{10^{-2}}{b-a}(b - a) = 10^{-2}$$

şi problema micşorării erorii este rezolvată. Totul depinde, după cum se vede, de alegerea potrivită a punctelor $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$.

Să aplicăm procedeul expus funcției $f(x) = x^2$, considerate pe intervalul [0, 1]. Pentru simplificare, să alegem punctele $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$, astfel încît

$$x_1 - a = x_2 - x_1 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots = \\ = b - x_{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Avem

$$x_{i+1}^2 - x_i^2 = (x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) = \\ = \frac{x_{i+n} + x_i}{n} < \frac{2}{n} \, (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

deci, pentru ca $x_{i+1}^2 - x_i^2 < 10^{-2}$, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, \ldots, n - 1$, este suficient ca $10^{-2} n > 2$, adică $n > 200$. Deci, de îndată ce $n > 200$, expresia

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{i^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$$

aproximează aria porțiunii delimitate de arcul $y = x^2$, axa $Ox$ și dreapta $x = 1$ cu o eroare mai mică decît $10^{-2}$.

Este ușor de înțeles acum că în loc de $10^{-2}$ putem lua orice număr dorim, oricît de mic. Aria porțiunii considerate va putea fi aproximată cu o eroare mai mică decît acest număr, cu condiția ca $n$ să fie destul de mare. Valoarea exactă a ariei căutate va fi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{i^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right] = \frac{1}{3}.$$

### CAZUL ÎN CARE FUNCȚIA NU MAI ESTE MONOTONĂ

Ușurința cu care am determinat, în cele de mai sus, valoarea ariei cu o eroare oricît de mică o doream se datora faptului că arcul de curbă care delimita porțiunea de plan considerată era graficul unei funcții monotone. Ce se întîmplă însă dacă funcția nu este monotonă? La prima ve-

dere, s-ar părea că orice funcţie continuă este alcătuită din „bucăţi monotone“. Dacă ar fi aşa, ar rămîne doar să descompunem intervalul $[a, b]$ în intervale parţiale, astfel încît pe fiecare interval parţial funcţia să fie monotonă şi să aplicăm pe fiecare interval de monotonie consideraţiile expuse mai sus. Însă analiştii au pus în evidenţă, încă în secolul trecut, existenţa funcţiilor continue care nu sînt monotone pe nici un interval. Deci, din procesul de determinare a ariei trebuie să eliminăm ipoteza de monotonie. Acest lucru nu va fi atît de greu, dacă ne gîndim că monotonia funcţiei a intervenit doar în chestiunea evaluării erorii. Vom menţine deci procedeul utilizat la funcţii monotone în chestiunea determinării aproximative a ariei, urmînd ca evaluarea erorii să constituie obiectul unei alte cercetări. De altfel, vom avea grijă să marcăm momentul în care aceste două probleme se despart, pornind fiecare pe drumul ei propriu.

Fie $f(x)$ o funcţie pozitivă pe intervalul $[a, b]$. Fie $D$ porţiunea limitată de graficul funcţiei $f(x)$, axa absciselor şi paralele $x = a$ şi $x = b$ la axa ordonatelor. Să împărţim intervalul $[a, b]$ în intervale parţiale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Să construim pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \dots, \dots, n-1)$ un dreptunghi de bază $x_{i+1} - x_i$ şi de înălţime $f(x_i)$. Reunind dreptunghiurile astfel obţinute, obţinem o porţiune $P$ a planului. Aria acestei porţiuni este dată de

$$\text{aria } P = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + \\ + f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \dots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Aria lui $P$ diferă de aria lui $D$. Într-adevăr, dacă privim figura 4.IV, constatăm că $P$ are în plus, faţă de $D$, porţiunile haşurate, iar $D$ are în plus, faţă de $P$, porţiunile punctate. Este adevărat că se poate întîmpla ca aria totală a porţiunilor haşurate să fie egală cu aria totală a porţiunilor punctate şi, datorită acestei compensări, aria lui $D$ să fie egală cu aria lui $P$.

Aceasta ar fi însă o situaţie excepţională; în general, această compensare nu se produce. De exemplu, dacă funcţia $y = f(x)$ este crescătoare, nu există porţiuni haşurate,

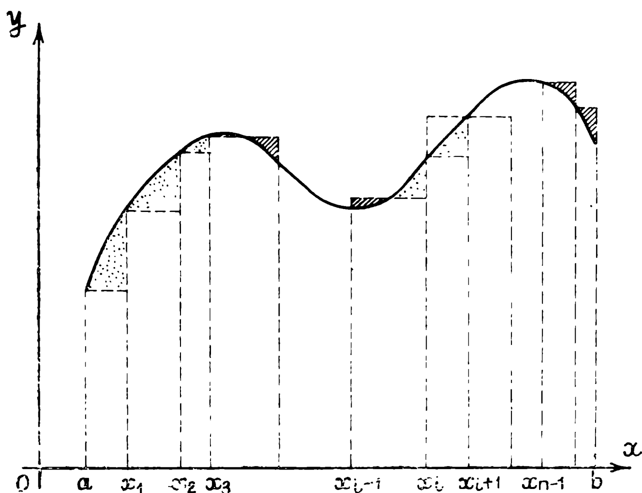



*Fig. 4. IV*

iar dacă funcţia $y = f(x)$ este descrescătoare, lipsesc porţiunile punctate. În primul caz, aria lui $P$ este mai mică decît a lui $D$; în al doilea caz, aria lui $P$ este mai mare decît aria lui $D$.

## DOUĂ CĂI POSIBILE

Înainte de a merge mai departe, să precizăm o anumită alternativă în legătură cu problema pe care am pus-o. Ne-am propus să determinăm aria porţiunii $D$. Dacă vrem să facem aceasta în mod exact, nu ne putem opri aici; trebuie să vedem în ce fel se poate elimina eroarea care provine din înlocuirea lui $D$ cu $P$. Dacă însă ne mulţumim

să determinăm aria lui $D$ nu în mod exact, ci cu o anumită aproximaţie, de pildă s-o determinăm cu o eroare care să nu depăşească o sutime, atunci problema se pune cu totul altfel. Am putea, de exemplu, încerca să alegem punctele $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}$ astfel încît diferenţa dintre aria totală a porţiunilor haşurate şi aria totală a porţiunilor punctate să nu depăşească pe 0,01. Cu aceasta însă nu putem spune că am înlocuit problema iniţială, a determinării exacte a ariei, cu o problemă mai uşoară. Dificultatea primei probleme provine, de obicei, din structura complicată a curbei $C$, adică a funcţiei $y = f(x)$. Se pune deci problema de a înlocui curba $C$ cu alta mai simplă $C^*$, astfel încît aria porţiunii delimitate de aceasta din urmă să poată fi determinată relativ uşor şi, în acelaşi timp, să putem determina cît de mare este, în valoare absolută, diferenţa dintre aria delimitată de $C$ şi cea delimitată de $C^*$. De obicei, în rolul lui $C^*$ se ia o linie poligonală de un anumit tip sau un număr finit de arce de parabolă.

În practică, lucrăm deseori cu valori aproximative. Ne-am putea pune problema dacă nu cumva şi pentru determinarea ariei unei porţiuni mai complicate nu ne-am putea mulţumi cu o valoare aproximativă, simplificînd astfel problema. Este clar însă că o evaluare aproximativă a ariei prezintă interes numai dacă sîntem în stare să apreciem de ce ordin de mărime este eroarea comisă. În inginerie se acceptă, în general, o eroare mai mică de o sutime. Tocmai pentru această măsură a erorii este necesar, de multe ori, să cunoaştem şi teoria determinării exacte a ariei. După ce cunoşti teoria determinării exacte a ariei, te întorci la problema determinării ei aproximative cu forţe noi, cu posibilităţi noi de investigaţie. Nu vom insista aici asupra acestei chestiuni, dar importanţa ei nu poate fi subapreciată. Ori de cîte ori nu vom fi în stare să determinăm valoarea exactă a ariei — şi acest lucru se întîmplă des —, şi de multe ori, chiar atunci cînd această determinare este teoretic posibilă, dar este legată de dificultăţi de ordin practic, determinarea aproximativă a ariei se impune.

Mai este însă și un alt motiv, mai important decît cel arătat mai sus, pentru care nu ne putem mulțumi numai cu aproximații. Teoria generală luminează calea mai departe, ne duce dincolo de problema concretă de la care am plecat și ne dă posibilitatea să pătrundem mai adînc în cunoașterea relațiilor din natură.

## CE SE ÎNTÎMPLĂ CÎND BAZELE DREPTUNGHIURILOR SE MICȘOREAZĂ ?

Să închidem paranteza pe care am deschis-o la începutul paragrafului precedent și să ne întoarcem la prima problemă: acea a determinării exacte a ariei. O observație simplă ne va indica drumul pe care trebuie să mergem. Dacă privim figura 4. IV, constatăm că există o legătură foarte strînsă între mărimile porțiunilor hașurate și punctate, pe de o parte, și lungimile bazelor dreptunghiurilor, pe de altă parte. Cu cît aceste baze sînt mai mici, cu atît sînt mai mici și porțiunile prin care diferă $D$ de $P$. Mai mult decît atît, dacă bazele dreptunghiurilor se micșorează indefinit, atunci atît porțiunile hașurate, cît și cele punctate se micșorează indefinit. Pentru a elimina deci eroarea, trebuie să studiem comportarea expresiei ariei lui $P$ atunci cînd diferențele $x_1—a$, $x_2—x_1, \ldots,$ $x_{i+1}—x_i, \ldots, b— x_{n-1}$ se apropie din ce în ce mai mult de zero. Aria porțiunii $D$ va fi tocmai numărul de care se apropie, către care tinde aria porțiunii $P$ atunci cînd bazele dreptunghiurilor se micșorează indefinit. Rămîne numai să vedem care este operația matematică prin care obținem acest număr. Înainte însă de a da răspunsul la această problemă, să mai studiem un exemplu.

## CE TREBUIE SĂ ÎNȚELEGEM PRIN LUCRUL MECANIC AL UNEI FORȚE VARIABILE ?

Să abordăm acum o problemă de mecanică. Fie o forță $f$ care-și deplasează punctul de aplicație în linie dreaptă, forța fiind îndreptată tot timpul pe direcția de deplasare.

Dacă forța este mereu aceeași, atunci lucrul mecanic pe care-l execută ea este egal cu produsul dintre mărimea forței și mărimea deplasării. Ce se întîmplă însă dacă forța $f$ variază de la punct la punct? Este bine știut că în general tocmai acesta este cazul. De exemplu, mărimea forței de gravitație variază de la punct la punct, deoarece și masa variază de la punct la punct; mărimea unei forțe elastice depinde de distanța față de un anumit punct fix al punctului în care este aplicată forța. În astfel de cazuri, ce trebuie să înțelegem prin lucru mecanic? Este clar că orice încercare de a răspunde la această întrebare trebuie să pornească de la acel caz particular în care răspunsul este cunoscut: cazul în care forța este aceeași în fiecare punct.

Fie $[a, b]$ segmentul de dreaptă de-a lungul căruia forța $f$ își deplasează punctul de aplicație. Fie $f(x)$ mărimea forței $f$ într-un punct oarecare $x$ cuprins între $a$ și $b$. Așa cum se întîmplă în general în natură, vom admite că forța $f$ variază în mod continuu. În acest fel, este clar că cu cît diferența $b—a$ este mai mică, cu atît este mai mică și eroarea pe care o comitem presupunînd că forța $f$ este invariabilă. Însă, noi nu dispunem de mărimea $b—a$. Această mărime este dată; modificînd-o, modificăm însăși problema pe care trebuie să o rezolvăm. Vom proceda atunci altfel. Vom împărți intervalul $[a, b]$ în intervalele parțiale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Variația forței $f(x)$ între $x_i$ și $x_{i+1}$ devine oricît de mică dorim, cu condiția ca $x_{i+1} - x_i$ să fie destul de mic. Aceasta înseamnă că pentru $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, presupunînd că forța aplicată în $x$ este nu $f(x)$, ci $f(x_i)$, comitem o eroare egală în valoare absolută cu $|f(x) - f(x_i)|$. Această eroare poate fi făcută oricît de mică, dacă avem grijă să luăm pe $x_{i+1}$ destul de aproape de $x_i$. Dar o astfel de ipoteză ne reduce problema tocmai la cazul în care forța este constantă. Lucrul mecanic de la $x_i$ la $x_{i+1}$ va fi dat de produsul $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Lucrul mecanic total, de la $a$ la $b$, va fi dat de suma

$$f(a)(x_1—a) + f(x_1)(x_2—x_1) + f(x_2)(x_3—x_2) + \ldots +$$
$$+ f(x_{n-1})(b - x_{n-1}).$$

Pentru a elimina eroarea care provine din presupunerea că forța este constantă pe porțiuni, va trebui să studiem comportarea expresiei de mai sus atunci cînd numerele $x_{i+1} - x_i$ se micșorează indefinit. Valoarea exactă a lucrului mecanic al forței $f(x)$, de la $a$ la $b$, va fi dată de numărul de care se apropie suma de mai sus, atunci cînd diferențele $x_1 - a$, $x_2 - x_1, \ldots, x_{i+1} - x_i, \ldots, b - x_{n-1}$ se apropie de zero. Rămîne numai să vedem, ca și în exemplul precedent, cum exprimăm aceasta într-un mod precis, matematic.

## ASEMĂNĂRI ȘI DEOSEBIRI ÎNTRE CELE DOUĂ EXEMPLE DE MAI SUS. NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ

Să încercăm să comparăm cele două exemple de mai sus Din punctul de vedere al conținutului proceselor înfățișate, aceste exemple sînt de natură foarte diferită. Primul este de natură geometrică, în timp ce al doilea este luat din fizică. În primul exemplu, $f(x)$ reprezintă înălțimea unui dreptunghi cu vîrful de jos, din stînga, situat în punctul de abscisă $x$, în al doilea exemplu, $f(x)$ reprezintă forța aplicată în $x$. În sfîrșit, în primul exemplu suma considerată reprezintă o arie, pe cînd în exemplul al doilea aceeași sumă reprezintă un lucru mecanic.

Cele două procese prezintă totuși o analogie izbitoare. Am putea spune că din punct de vedere formal ele sînt identice. Dacă le golim de conținutul lor specific, adică facem abstracție de acest conținut, constatăm că aceste procese conduc la aceeași schemă, sînt de aceeași formă. Și într-un caz și în celălalt, s-a pornit de la o funcție $f$ definită pe un interval $[a, b]$. S-a împărțit acest interval în intervale parțiale, efectuîndu-se o diviziune — să-i spunem $D$ — a lui $[a, b]$:

$$D = (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b).$$

Acestei diviziuni $D$ i s-a asociat expresia

$$S(D) = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}) \quad (1)$$

S-a constatat apoi că în ambele cazuri este necesar să studiem comportarea sumei $S(D)$ date de (1) atunci cînd numerele $x_{i+1} - x_i$ se apropie de zero. Acum a sosit momentul să precizăm această afirmaţie, să-i dăm un sens matematic.

Să considerăm din nou toate diferenţele $x_1$ - ... ..., $x_{i+1} - x_i$, ... $b - x_{n-1}$. Să ne îndreptăm atenţia asupra celei mai mari dintre aceste diferenţe şi s-o notăm pe aceasta cu $|D|$ (alte notaţii: $||D||$ sau $\nu(D)$. Numărul $|D|$ se numeşte *norma diviziunii D*. Nu este greu de înţeles importanţa normei; în loc să spunem de pildă, că fiecare dintre diferenţele $x_{i+1} - x_i$ este inferioară numărului 1, va fi suficient să spunem că $|D| < 1$). Din faptul că prin definiţie fiecare diferenţă $x_{i+1} - x_i$ ($i = 0, \ldots, n-1$) este mai mică sau egală cu $|D|$, va rezulta atunci şi prima afirmaţie, anume că toate diferenţele $x_{i+1} - x_i$ sînt inferioare lui 1.

Fie acum un şir de diviziuni $D_1, D_2, \ldots, D_p, \ldots$ ale lui $[a, b]$. Să presupunem că şirul $|D_1|, |D_2|, \ldots, |D_p|, \ldots$ tinde la zero. Exemplele considerate anterior ne sugerează că trebuie să studiem comportarea sumei $S(D_p)$ atunci cînd $n$ creşte, cu alte cuvinte să ne îndreptăm atenţia asupra limitei şirului $S(D_1)$, $S(D_2), \ldots, S(D_p), \ldots$, adică asupra numărului $I = \lim S(D_p)$. Suma $S(D_p)$ se apropie oricît de mult de $I$, cu condiţia ca $n$ să fie suficient de mare. Mai precis, fiind dat un număr $p' > 0$, se poate determina un număr $N$, astfel încît pentru $p > N$ să avem $|I - S(D_p)| < p'$. Deci, apropierea de $I$ a lui $S(D)$ este condiţionată de mărimea (mai bine zis de micimea) normei diviziunii $D$.

Procesul înfăţişat mai sus este un *proces de integrare*, iar numărul $I$, rezultatul acestui proces, se numeşte *integrala funcţiei f* de la $a$ la $b$ şi se notează

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

De multe ori însă, se înţelege prin *integrală* întregul proces de integrare, împreună cu numărul la care acest proces conduce. Poate, totuşi, că n-ar fi rău să diferenţiem terminologia referitoare la această chestiune. Este

foarte important să accentuăm caracterul de *proces* al celor înfățișate mai sus.

Semnul $\int$ este o deformare a literei $S$, inițiala cuvîntului „sumă". El ne amintește că prima etapă în procesul de integrare îl constituie considerarea unor sume. Era o vreme cînd anumite tipuri de integrale se notau chiar cu litera $S$. Astfel, de pildă, în unele lucrări mai vechi ale matematicianului român Dimitrie Pompeiu poate fi des întîlnită această notație. În prezent, această notație a fost părăsită aproape cu totul. Acest fapt este îndreptățit, deoarece integrala nu se obține prin simpla considerare a unor sume, ci prin supunerea acestor sume unei operații specifice analizei matematice, operația de trecere la limită. Tocmai pentru aceasta, notația integralei trebuia să se deosebească întrucîtva de litera $S$. Notațiile trebuie să fie cît mai simple, dar și cît mai adecvate obiectului, pentru ca prin intermediul lor să gîndim mai ușor asupra faptelor matematice în cauză. Notația $\mathrm{d}x$ amintește de diferențele $x_{i+1} - x_i$, iar $f(x)\mathrm{d}x$ de $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Desigur că simbolul (2) trebuie luat ca un tot. O componentă oarecare a acestui simbol, ca de exemplu $\int$ sau $\mathrm{d}x$, poate să fie lipsită de sens sau să aibă diverse sensuri. Alăturarea $f(x)\mathrm{d}x$ nu trebuie înțeleasă, în general, ca o operație de înmulțire după cum $\mathrm{d}x$ nu trebuie privit, în general, ca o diferențială. Nu este însă mai puțin adevărat că în anumite împrejurări, ca de exemplu în problema schimbării de variabilă într-o integrală, $\mathrm{d}x$ se comportă exact ca o diferențială, iar $f(x)\mathrm{d}x$ are semnificația de produs dintre $f(x)$ și $\mathrm{d}x$. Tocmai aceste împrejurări explică notația întrebuințată.

Semnificația numărului $I$, adică a integralei, depinde de conținutul specific al procesului de integrare pe care-l efectuăm, adică al procesului prin care, pornind de la $f(x)$, ajungem la $I$. Astfel, în raport cu primul exemplu, $I$ reprezintă aria porțiunii din plan determinate de graficul lui $f(x)$, axa absciselor și paralele prin $a$ și $b$ la $Oy$. În raport cu al doilea exemplu, $I$ reprezintă lucrul mecanic pe care-l execută forța $f(x)$ cînd își deplasează punctul de aplicație de la $a$ la $b$.

Am considerat mai sus doar două exemple, dar ne putem convinge ușor că procedeul prin care se determină spațiul parcurs de un mobil, atunci cînd se cunoaște viteza mobilului în fiecare moment, sau procedeul prin care se determină volumul unui corp de rotație, atunci cînd se cunoaște aria secțiunii perpendiculare pe axa de rotație, ca și multe alte procese din natură conduc, toate, la acel șir de operații pe care le-am descris mai sus și care asociază unei funcții definite în fiecare punct al unui interval un număr real, numit integrala funcției pe acel interval.

Sîntem astfel în posesia unui formalism matematic care sintetizează o varietate extraordinară de procese din natură, reținîndu-le substratul comun, partea lor pur cantitativă, formală. Trebuie, totuși, să observăm că în procesul de integrare a unei funcții există o etapă care, deși clară din punct de vedere teoretic, prezintă dificultăți din punctul de vedere al realizării ei efective. Ne gîndim la acel moment în care trecem de la $S(D)$ la numărul $I$. Numărul $I$ arată tendința sumelor $S(D)$ atunci cînd norma lui $D$ descrește, $I$ este valoarea de care se apropie $S(D)$ pe măsură ce norma $|D|$ se apropie de zero. Dar numărul $I$ nu ni se dă, urmînd doar ca noi să verificăm că el satisface condiția cerută; *noi* sîntem acei care trebuie să determinăm acest număr. Este adevărat că însăși definiția integralei arată prin ce operație obținem valoarea ei. Trebuie să determinăm limita șirului $S(D_1)$, $S(D_2)$,... $S(D_n)$,... Numai că această operație de determinare a limitei unui astfel de șir este, de cele mai multe ori, chiar în cazul unor funcții simple, legată de dificultăți practice deosebit de mari. Încercați să determinați această limită în cazul unei funcții foarte familiare, cum este $y = \sin x$ de exemplu, considerate pe intervalul $[0, 1]$, și veți vedea că chiar dacă lucrați cu diviziuni formate cu intervale de aceeași mărime, nu veți reuși s-o scoateți la capăt dacă nu stăpîniți bine formulele de trigonometrie.

Or, pentru un astfel de instrument de oglindire matematică a realității, este imperios necesar să găsim mijloace cît mai practice, mai operative de utilizare.

Descoperirea mijlocului de a transforma integrala într-un instrument nu numai virtual, dar și real eficace în descrierea anumitor procese, reprezintă unul din cele mai importante evenimente din istoria matematicilor, poate din întreaga istorie a științelor. Acest eveniment s-a petrecut în urmă cu aproape trei sute de ani. La sfîrșitul secolului al XVII-lea, Newton și Leibniz, independent unul de altul, au descoperit o legătură profundă între noțiunea de integrală și o altă noțiune, care în aparență nu are nici o legătură cu integrala, anume noțiunea de derivată. Este, într-adevăr, surprinzător acest lucru, dacă ne gîndim la modul atît de diferit în care aceste noțiuni au fost definite. Vom vedea însă că deîndată ce pătrundem în esența acestor noțiuni și le înțelegem bine sensul, legătura dintre ele ne apare foarte naturală. Se întîmplă de multe ori ca adevărul științific să aibă la primul contact o aparență paradoxală, să ne surprindă și uneori să vină chiar în contradicție directă cu intuiția imediată. Aceasta datorită faptului că în afară de legăturile exterioare, de suprafață, există între unele fenomene, între unele procese, o legătură lăuntrică, care privește însăși esența acestor fenomene sau procese. O astfel de legătură nu se lasă observată de la prima vedere; pentru a o sesiza nu este suficientă contemplarea pasivă a fenomenelor sau proceselor respective. Însă studiul unui mare număr de procese și separarea, cu grijă, la fiecare dintre ele a formei de conținut, o astfel de operație de abstractizare și sinteză este în măsură să ne conducă la adevăruri de mare valoare științifică.

Pentru a dezvălui această legătură, care conduce imediat la celebra formulă a lui Leibniz și Newton, am putea să reluăm unul dintre exemplele considerate mai sus, cel privitor la arie sau la lucru mecanic. Preferăm însă să folosim un alt exemplu, să pornim de la o altă problemă, care ni se pare mai semnificativă.

Să considerăm o bară materială unidimensională $AB$. Fie $a$ abscisa lui $A$ și $b$ abscisa lui $B$. Dacă bara este omogenă, atunci densitatea mijlocie a barei este aceeași pe oricare porțiune a ei. Cu alte cuvinte, pentru orice

porţiune a barei, raportul dintre masa acestei porţiuni şi lungimea ei este acelaşi. Prin însuşi acest fapt, noţiunea de densitate mijlocie este nesemnificativă, inutilă în cazul unei bare omogene.

Să presupunem acum că bara $AB$ nu este omogenă. Aceasta înseamnă că două porţiuni de aceeaşi lungime pot să fie de mase diferite. Pentru a căpăta o imagine a repartiţiei masei pe diferitele porţiuni ale barei, sîntem conduşi să considerăm raportul dintre masa unei porţiuni şi lungimea ei. Acest raport ne indică densitatea mijlocie a barei pe porţiunea respectivă, adică masa ce se găseşte în medie, pe unitatea de lungime, pe porţiunea respectivă. De exemplu, dacă notăm cu $F(x)$ masa ce se găseşte între $A$ şi punctul $X$ de abscisă $x$, considerînd două puncte $X'$ şi $X''$ ale barei, de abscise, respectiv, $x'$ şi $x''$, densitatea mijlocie a porţiunii $X'X''$ va fi dată de raportul

$$\frac{F(x'') - F(x')}{x'' - x'}. \qquad (3)$$

Acest raport nu ne spune însă nimic despre modul de repartiţie a masei pe diferitele porţiuni ale intervalului $[x', x'']$. Sîntem astfel conduşi, pentru a căpăta o imagine a acestei repartiţii, să cercetăm densitatea mijlocie a barei pe porţiuni din ce în ce mai mici. O dată porniţi pe această cale, nu ne mai putem opri la jumătatea drumului; trebuie să cercetăm comportarea raportului (3) atunci cînd diferenţa $x'' - x'$ se micşorează indefinit. În felul acesta, ajungem să obţinem o imagine locală, punctuală, a repartiţiei masei. Iată ce trebuie să înţelegem prin aceasta.

Fie $X_0$ un punct cuprins între $A$ şi $B$. Să notăm cu $x_0$ abscisa lui $X_0$. Raportul

$$\varphi(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{2h}$$

reprezintă densitatea mijlocie a barei pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ cu centrul în $x_0$. Să presupunem că $\varphi(h)$ admite o limită finită cînd $h$ tinde la zero. Cu alte cuvinte, există un număr $\alpha$, astfel încît pentru orice şir $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ tinzînd la zero, şirul $\varphi(h_1), \varphi(h_2), \ldots, \varphi(h_n), \ldots$ tinde la $\alpha$. Valoarea $\alpha$ a limitei astfel obţinute este, prin definiţie, densitatea barei $AB$ în punctul $X_0$.

Este evidentă deosebirea dintre densitatea mijlocie şi densitatea într-un punct. Prima se referă la un întreg interval, are deci un caracter global, integral, şi se obţine prin operaţii de scădere şi împărţire; a doua se referă la un punct, are deci un caracter local, punctual, şi se obţine printr-o operaţie, un proces de trecere la limită.

Dar, între funcţia $F(x)$, care reprezintă masa ce se găseşte între $A$ şi $X$, pe de o parte, şi densitatea punctuală a barei, pe de altă parte, există o legătură strînsă; derivata funcţiei $F(x)$ într-un punct $x_0$ este tocmai densitatea barei în punctul $x_0$. Într-adevăr, avem

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-\frac{F(x_0)-F(x_0-h)}{h}\right],$$

şi deoarece, punînd $-h=k$, obţinem

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0)-F(x_0-h)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{F(x_0+k)-F(x_0)}{k}=F'(x_0),$$

deducem

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}+\lim_{k\to 0}\frac{F(x_0)-F(x_0-h)}{h}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[F'(x_0)+F'(x_0)\right]=F'(x_0).$$

Cunoscînd deci masa unei bare, putem afla densitatea punctuală a barei. Trecerea de la una la cealaltă se face printr-un proces de derivare. Masa este o caracteristică globală a barei, iar densitatea este o caracteristică locală, punctuală.

Prin consideraţii analoge, binecunoscute, cunoscînd spaţiul parcurs de un mobil în orice interval de timp (deci caracteristica integrală, în mare, a unei mişcări), putem determina, printr-un proces de derivare, viteza la un moment oarecare a mobilului (deci caracteristica momentană, instantanee, a mişcării). Ne apare astfel semnificaţia comună tuturor proceselor de derivare: trecerea de la descrierea în mare a unui fenomen, la descrierea lui locală sau momentană.

Să încercăm acum să punem problema invers. Cunoscînd densitatea în fiecare punct a unei bare neomogene, să determinăm masa barei.

Deoarece densitatea variază în mod continuu, presupunerea că bara ar fi omogenă este cu atît mai apropiată de realitate, comportă o eroare cu atît mai mică, cu cît bara este mai mică. Însă, neputînd modifica lungimea barei, vom presupune că bara este omogenă pe porţiuni, cu alte cuvinte există o diviziune $D$ a intervalului $[a, b]$ în intervale parţiale $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$, astfel încît porţiunea $[x_i, x_{i+1}]$ este omogenă, oricare ar fi $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Aceasta înseamnă că în fiecare punct al intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ densitatea este aceeaşi, de pildă egală cu valoarea ei în punctul $x_i$. În acest caz, masa porţiunii $[x_i, x_{i+1}]$ este egală cu produsul dintre lungimea acestei porţiuni şi densitatea ei, adică cu $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ (prin $f(x)$ notăm densitatea barei în punctul $x$). Masa (aproximativă) a barei este

$$S(D) = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$$

şi această masă aproximativă este cu atît mai apropiată de masa exactă a barei, cu cît lungimile intervalelor diviziunii $D$ sînt mai mici. Sîntem deci conduşi, pentru a elimina eroarea provenită din aproximarea pe care am făcut-o, să considerăm un şir de diviziuni $D_n$, pentru care $\lim_{n \to \infty} |D_n| = 0$. Masa exactă a barei va fi dată de limita şirului

$$S(D_1),\ S(D_2),\ \ldots,\ S(D_n), \ldots .$$

După cum vedem, operaţiile prin care, pornind de la densitatea punctuală a barei, determinăm masa ei, sînt, din punctul de vedere al formei lor, exact aceleaşi pe care le-am folosit pentru a determina aria porţiunii din plan delimitată de o curbă, cînd se cunoaşte ordonata fiecărui punct al curbei, sau pentru a determina lucrul mecanic al unei forţe atunci cînd se cunoaşte mărimea forţei în fiecare punct. Deci, cunoscînd densitatea, masa se obţine printr-un proces de integrare. Dacă $f(x)$ este densitatea barei în punctul $x$, atunci masa barei este

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

O trăsătură comună tuturor exemplelor considerate este trecerea de la descrierea locală punctuală sau instantanee a unui fenomen la descrierea lui în mare, adică tocmai procesul invers derivării, care, după cum am văzut mai sus, ne dă posibilitatea să trecem de la descrierea globală a unui fenomen la descrierea lui locală.

Această trăsătură a procesului de derivare apare nu numai cînd se definește densitatea; ea aparține oricărui proces de derivare, și semnificația derivării stă tocmai în această trăsătură. Deci, integrarea și derivarea sînt două procese opuse, inverse unul altuia, așa cum sînt opuse operațiile de adunare și scădere sau cele de înmulțire și împărțire. Iată un tablou care redă acest aspect al derivării și integrării:

| Caracteristica locală | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Caracteristica globală |
|---|---|---|
| Ordonata punctului de abscisă $x$ de pe graficul funcției $f(x) > 0$ definită pe $[a, b]$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Aria porțiunii din plan delimitată de dreptele $x = a$, $x = x$ și curba $y = f(x)$. |
| Viteza unui mobil la fiecare monent $t$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Spațiul parcurs de mobil în intervalul de timp de la momentul $t=a$ la momentul $t=t$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. |
| Densitatea punctuală a unei bare de abscise extreme $a$ și $b$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Masa totală a porțiunii $[a, x]$ din bară. |
| Aria secțiunii perpendiculare pe axa de rotație într-un corp descris prin rotația de 360° a curbei $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) > 0)$ în jurul axei $Ox$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Volumul corpului de rotație corespunzător segmentului $[a, x]$, $(a \leqslant x \leqslant b)$. |
| Densitatea punctuală a unei sarcini electrice liniare distribuite pe $[a, b]$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Sarcina electrică totală pe porțiunea $[a, x]$, unde $a \leqslant x \leqslant b$. |
| Mărimea forței $f(x)$ pentru fiecare $x$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. | integrare $\rightleftarrows$ derivare | Lucrul mecanic total al forței $f$ de la $a$ la $x$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. |

Sub acest raport, al trecerii de la aspectul local la aspectul global al unui fenomen, noţiunea de integrală constituie punctul de plecare al uneia dintre cele mai importante ramuri ale analizei matematice: teoria ecuaţiilor diferenţiale. A integra o funcţie $f(x)$ înseamnă a găsi o altă funcţie $F(x)$ a cărei derivată este $f(x)$, adică $F'(x) = f(x)$. O astfel de ecuaţie, în care necunoscuta este o funcţie, anume $F(x)$, şi această funcţie intervine prin derivata ei, se numeşte o ecuaţie diferenţială. Dar legătura între aspectul local şi cel global al unui fenomen nu este dată totdeauna sub această formă simplă. Nenumărate probleme de geometrie, de fizică, de chimie etc. conduc la legături mai complicate între aspectele locale şi cele globale, adică la ecuaţii diferenţiale mai complicate decît cea de mai sus. Studiul acestor ecuaţii este deosebit de important pentru descrierea matematică a fenomenelor naturii, şi teoria lor este una dintre cele mai delicate ale matematicii moderne.

În cadrul şcolii matematice româneşti există bogate tradiţii privind studiul ecuaţiilor diferenţiale. Amintim aici teza de doctorat a lui Simion Stoilow, contribuţiile lui Nicolae Ciorănescu, ale academicienilor Miron Nicolescu, Grigore Moisil şi Nicolae Teodorescu şi ale profesorului Ciprian Foiaş (în domeniul ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale), precum şi teza de doctorat a lui Anton Davidoglu şi contribuţiile lui V. M. Popov, membru corespondent al Academiei, şi ale profesorilor I. Barbălat, C. Corduneanu şi A. Halanay (în domeniul ecuaţiilor diferenţiale ordinare).

## MOMENTUL CAUCHY

În prezentarea de mai sus, am lăsat deoparte unele aspecte existenţiale, calitative sau care ţin aproape exclusiv de dezvoltarea internă a teoriei integralei. Aceste aspecte au fost studiate abia atunci cînd analiza matematică a atins un grad mai înalt de dezvoltare, anume începînd cu a doua jumătate a secolului trecut. Am urmărit doar să explicăm geneza uneia dintre cele mai importante

noţiuni ale matematicii, rădăcinile ei adînci în realitate. În cele ce urmează vom urmări mai departe evoluţia ideii de integrală, arătînd ce a determinat, de fiecare dată, lărgirea vechiului cadru, punînd accentul de fiecare dată pe aspectele intuitive privind legătura teoriei integralei cu ceea ce este în afara ei.

La începutul secolului trecut, Cauchy era preocupat de integrarea funcţiilor continue. În acest scop, el a folosit sume de tipul

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{4}$$

(unde $\Delta$ este diviziunea $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$, iar $f$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$) şi a demonstrat că există un număr natural $I$ cu proprietatea următoare: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încît oricare ar fi diviziunea $\Delta$ de normă inferioară lui $\eta$, avem $|\sigma_\Delta(f) - I| < \varepsilon$. Sumele de tipul (4) se numesc sume Cauchy, integrabilitatea în sensul definit mai sus se numeşte integrabilitate Cauchy, iar numărul $I$ se numeşte integrala Cauchy a funcţiei $f$ pe $[a, b]$. Rezultă că orice funcţie continuă este integrabilă Cauchy. Pe de altă parte, se ştie că o funcţie continuă pe un interval admite primitivă pe acest interval, adică există o funcţie derivabilă. $G$, astfel încît $G' = g$ pe $I$. Fie $F$ o primitivă a funcţiei $f$. O teoremă celebră a lui Leibniz şi Newton — teoremă care, într-un anumit caz particular, a fost prezentată în paragraful precedent — ne asigură că valoarea $I$ a integralei lui $f$ pe $[a, b]$ este tocmai diferenţa $F(b) - F(a)$. Cu alte cuvinte, atîta timp cît ne restrîngem la clasa funcţiilor continue, procesul de derivare şi cel de integrare (aşa cum a fost conceput de Cauchy) apar efectiv ca două procese duale, în concordanţă cu schema generală a proceselor de derivare şi integrare, schemă descrisă în paragraful precedent.

## MOMENTUL RIEMANN

Dar dezvoltarea analizei matematice a condus, încă din prima jumătate a secolului trecut — în special prin teoria seriilor trigonometrice — la considerarea funcţiilor

discontinue. Serii trigonometrice dintre cele mai simple au ca sumă funcţii discontinue. Este suficient să ne amintim că însăşi funcţia lui Dirichlet, egală cu 1 pentru $x$ raţional şi cu 0 pentru $x$ iraţional, este suma unei serii trigonometrice şi tocmai acest fapt l-a determinat pe Dirichlet s-o considere.

Dar, aşa cum în studiul seriilor de puteri un rol fundamental îl joacă derivata, în studiul seriilor trigonometrice nu ne putem dispensa de noţiunea de integrală. Coeficienţii unei serii de puteri se exprimă cu ajutorul sumei seriei, folosind operaţia de derivare. Coeficienţii unei serii trigonometrice convergente pe un interval $J$ se exprimă uneori cu ajutorul sumei acestei serii, folosind operaţia de integrare pe $J$. Aceasta presupune deci că funcţia-sumă se poate integra. Trebuie deci să imaginăm un procedeu de integrare care să se aplice şi funcţiilor discontinue, deoarece suma unei serii trigonometrice nu este totdeauna o funcţie continuă.

Ideea lui Riemann a fost aceea de a considera procedeul utilizat de Cauchy în integrarea funcţiilor continue şi de a stabili limitele de aplicabilitate a acestui procedeu. Deci, în timp ce Cauchy îşi dădea o funcţie continuă arbitrară şi-şi propunea s-o integreze printr-un procedeu fixat, Riemann îşi dă o funcţie despre care nu mai presupune că este continuă, ci doar că i se poate aplica procedeul de integrare propus de Cauchy. O astfel de funcţie primeşte numele de funcţie integrabilă Riemann, iar integrala ei este integrala Riemann (a se vedea şi sfîrşitul capitolului I') Deci în timp ce Cauchy este preocupat de calculul integralei unei funcţii continue, Riemann îşi îndreaptă atenţia principală asupra ideii de integrabilitate. În fapt, Riemann nu consideră chiar sume de tipul (4), ci nişte sume de o formă mai generală şi anume:

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \tag{5}$$

unde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$, pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$. O funcţie $f$ este deci integrabilă Riemann pe $[a, b]$, dacă există un număr $I$ cu următoarea proprietate: oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$, astfel încît dacă norma diviziunii $\Delta$ este mai

mică decît $\eta$, atunci $|I - \sigma_\Delta(f, \xi_i)| < \varepsilon$, oricare ar fi valorile $\xi_i$ pentru care $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Numărul $I$ se numește integrala Riemann a funcției $f$ pe $[a, b]$.

După Riemann, efortul matematicienilor s-a îndreptat spre caracterizarea structurală a funcțiilor integrabile Riemann, pentru a se stabili, în felul acesta, cît de mult depășește clasa funcțiilor integrabile Riemann pe aceea a funcțiilor continue. Punctul culminant al acestui efort este marcat de un rezultat — astăzi clasic — datorit lui Lebesgue și care constituie una dintre cele mai frumoase teoreme ale analizei matematice. Lebesgue a demonstrat că o funcție mărginită este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, dacă și numai dacă ea este continuă aproape peste tot pe $[a, b]$. Amintim că o proprietate punctuală are loc aproape peste tot, dacă punctele în care ea nu se verifică alcătuiesc o mulțime de măsură nulă, adică (a se vedea și capitolul I) o mulțime $A$, cu proprietatea că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ se poate găsi o familie cel mult numărabilă de intervale de lungime totală inferioară lui $\varepsilon$, care acoperă mulțimea $A$. Este destul să observăm că există mulțimi infinite (chiar nenumărabile), care sînt de măsură nulă, pentru ca să ne dăm seama că clasa funcțiilor integrabile Riemann este mult mai largă decît clasa funcțiilor continue. În particular, orice funcție cu variație mărginită este integrabilă Riemann.

Oricărei funcții $f$ integrabile Riemann pe $[-\pi, \pi]$ i se asociază o serie Fourier-Riemann, adică o serie trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ai cărei coeficienți $a_n$ și $b_n$ sînt dați de expresiile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

unde integrala este considerată în sensul lui Riemann. În particular, oricărei funcții cu variație mărginită pe $[-\pi, \pi]$ i se asociază o serie Fourier-Riemann pe $[-\pi, \pi]$. O teoremă clasică a lui Jordan afirmă că această serie

este convergentă în fiecare punct și admite ca sumă pe $f(x)$ în orice punct $x$ în care $f$ este continuă; în plus, convergența seriei este uniformă pe orice subinterval compact în care funcția este continuă.

## „DIVORȚUL" DINTRE PRIMITIVĂ ȘI INTEGRALĂ

Am văzut că pentru o funcție $f$ continuă pe $[a, b]$, integrala de la $a$ la $b$ se obține făcînd diferența valorilor primitivei lui $f$ în punctele $b$ și $a$. Tocmai în această proprietate stă întreaga fecunditate a calculului diferențial și integral clasic. Extensiunea adusă de Riemann ideii de integrabilitate, lărgind considerabil clasa funcțiilor care se pot integra, pune în același timp o problemă gravă: o funcție integrabilă Riemann admite totdeauna primitivă? În cazul afirmativ, mai este în vigoare aici o formulă de tipul Leibniz-Newton? Trebuie să spunem că răspunsul la prima întrebare este negativ, deci problema a doua nu se mai pune. Este suficient să ne gîndim la funcția lui Riemann, definită pe $[a, b]$ $(a > 0)$ în felul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{dacă } x = \dfrac{p}{q}, \text{ unde } p \text{ și } q \text{ sînt numere întregi, } q > 0, \\ & \text{iar } p \text{ și } q \text{ sînt prime între ele.} \end{cases}$$

Această funcție este evident mărginită, iar mulțimea punctelor ei de discontinuitate coincide cu mulțimea punctelor raționale din $[a, b]$, deci este o mulțime numărabilă. Dar o mulțime numărabilă este de măsură nulă deci, în baza teoremei fundamentale a lui Lebesgue, semnalată în paragraful precedent, funcția considerată este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Pe de altă parte, această funcție admite în fiecare punct rational o discontinuitate de prima specie (avem $f(x - 0) = f(x + 0) = 0$ pentru orice $x$ din $[a, b]$), deci $f$ nu admite primitivă (conform unei teoreme care afirmă că discontinuitățile unei funcții derivate nu pot fi de prima specie).

Acest exemplu arată cît de mult se poate deosebi o funcţie integrabilă Riemann de o funcţie care admite primitivă. Există însă o situaţie de compromis: Dacă o funcţie $f$, integrabilă Riemann pe $[a, b]$, admite primitivă — fie ea $F$ — pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Pentru a ne asigura că această teoremă constituie un progres real în raport cu formula lui Leibniz-Newton pentru funcţii continue, este necesar să dăm un exemplu de funcţie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ care nu este continuă pe $[a, b]$, dar admite primitivă pe $[a, b]$. Un astfel de exemplu este funcţia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

Această funcţie este mărginită şi admite un singur punct de discontinuitate (în origine), deci este integrabilă Riemann pe orice interval compact. În acelaşi timp $\varphi$ admite primitivă pe orice interval; funcţia $F$ dată de

$$F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă a funcţiei $\varphi$.

Ţinînd seamă că există derivate discontinue (funcţia $\varphi$ de mai sus constituie un astfel de exemplu), este natural să ne întrebăm dacă există derivate neintegrabile Riemann. Este de la sine înţeles că această problemă devine interesantă numai dacă ne restrîngem la derivate mărginite, deoarece o derivată nemărginită pe un interval compact nu va avea nici o şansă să fie integrabilă Riemann pe acest interval. Primul exemplu de derivată mărginită, neintegrabilă Riemann, a fost dat la sfîrşitul secolului trecut de către matematicianul italian Vito Volterra. Nu vom reproduce aici acest exemplu, deoarece un exemplu

mai elementar și mai puternic este furnizat de o construcție imaginată de către matematicianul român Dimitrie Pompeiu. Fie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x - r_n)^{\frac{1}{3}}, \tag{6}$$

unde $\{r_n\}$ este un șir format cu numerele raționale din intervalul compact $[a, b]$. Se arată relativ ușor că seria din membrul al doilea din (6) este convergentă pe $[a, b]$, iar funcția $f$ este continuă și strict crescătoare pe $[a, b]$. Rezultă că $f$ este inversabilă pe $[a, b]$, iar inversa ei, fie ea $g$, este continuă și strict crescătoare pe $[f(a), f(b)]$. Mai mult decît atît, se arată că $g$ este derivabilă pe $[f(a), f(b)]$, iar derivata $g'$, deși mărginită, nu este integrabilă Riemann pe nici un subinterval compact al lui $[f(a), f(b)]$. (Exemplul lui Volterra este acela al unei derivate mărginite $h$, neintegrabile Riemann pe $[a, b]$, dar orice interval conținut în $[a, b]$ conține un subinterval compact, pe care $h$ este integrabilă Riemann.) Recent, un matematician american, Andrew Bruckner, reluînd și continuînd cercetările lui Pompeiu, a reușit să dea un exemplu de derivată mărginită, discontinuă aproape peste tot. Acest exemplu arată cît de mult se poate deosebi o derivată mărginită de o derivată integrabilă Riemann (aceasta din urmă este obligatoriu continuă aproape peste tot).

## DOUĂ IDEI ALE LUI LEBESGUE

Am adunat destule probe pentru ca să putem afirma că analiza matematică are nevoie de o integrală mai generală decît aceea în sensul lui Riemann. Să mai semnalăm faptul că există serii trigonometrice convergente, a căror sumă nu este o funcție integrabilă Riemann pe intervalul de convergență. În sfîrșit, să mai amintim faptul că și problema calculului lungimii unei curbe rectificabile a condus la necesitatea de a se considera o integrală mai generală decît integrala Riemann (vezi capitolul III). O astfel de integrală mai generală, care avea să dea răspunsuri cel puțin parțiale la toate problemele în fața cărora inte-

grala Riemann se dovedea neputincioasă, avea să fie introdusă la începutul secolului nostru de către matematicianul francez Henri Lebesgue. Integrala introdusă de către Lebesgue constituie cel mai de seamă eveniment din întreaga dezvoltare a teoriei integralei de la Riemann şi pînă în zilele noastre. Însă, înainte de a o prezenta, să încercăm să reconstituim, măcar cu aproximaţie, mersul gîndirii lui Lebesgue.

După cum se poate constata din capitolul III, Lebesgue obişnuia să se inspire în invenţiile sale matematice din cele mai simple intuiţii pe care le oferă realitatea imediată. Observînd cu atenţie procedeele utilizate în matematica elementară, spiritul critic al lui Lebesgue îndepărta cu curaj orice element neesenţial, chiar dacă acesta era intrat atît de mult în obişnuinţă, încît nimeni nu se mai întreba asupra rostului său.

Să ne întoarcem, pentru un moment, la procedeul de integrare folosit de Riemann. Fiind dată o funcţie reală $f$ definită pe $[a, b]$, Riemann asociază fiecarei diviziuni $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ expresiile de forma

$$\sigma_\Delta (f, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \qquad (7)$$

Din punct de vedere geometric o sumă Riemann (adică o sumă de forma (7)) reprezintă aria unui anumit domeniu poligonal $D_\Delta(f, \xi_i)$, care se obţine printr-o reuniune finită de domenii dreptunghiulare $D_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1)$, baza lui $D_i$ fiind de mărime $x_{i+1} - x_i$, iar înălţimea fiind egală cu $f(\xi_i)$. Procesul de integrare riemanniană revine, din punct de vedere geometric, la o aproximare a ariei porţiunii din plan delimitate de axa absciselor, dreptele $x = a$, $x = b$ şi graficul funcţiei considerate prin ariile domeniilor poligonale $D_\Delta(f, \xi_i)$ (vezi fig. 4IV). În fapt, integrabilitatea Riemann a funcţiei $f$ revine la existenţa şi finitudinea limitei

$$\lim_{\nu(\Delta_p)\to 0} \text{aria}\, D_{\Delta_p}(f, \xi_i^p)$$

și la independența acestei limite atît de șirul de diviziuni $\Delta_p$ de normă tinzînd la zero, cît și de valorile intermediare $\xi_i^p$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

După cum vedem, în procesul de integrare riemanniană un rol central îl au diviziunile $\Delta$ ale intervalului de definiție a funcției $f$. Dar o diviziune $\Delta$ revine la o partiție finită a intervalului $[a, b]$ în subintervale, deoarece orice diviziune $\Delta$ induce o astfel de partiție și invers. Deci punctele din $[a, b]$ sînt clasificate aici luînd drept criteriu ordinea lor de la stînga la dreapta, pe intervalul $[a, b]$. De exemplu, mulțimea de rang $i$ a acestei partiții este alcătuită din punctele din $[a, b]$ care nu sînt la stînga punctului de abscisă $x_i$, dar se află la stînga punctului de abscisă $x_{i+1}$.

Lebesgue a observat că acest criteriu al ordinii de la stînga la dreapta (adică al ordinii induse de mărimea abscisei) este un rezultat al rutinei, el nefiind cerut de esența problemei integrării. În fapt, adoptarea acestui criteriu este chiar nepractică, așa cum nepractic este să numărăm o sumă de bani în ordinea întîmplătoare în care monezile sînt scoase din buzunar. Numărătoarea devine mult mai simplă dacă grupăm în prealabil, monezile punînd laolaltă pe cele de 1 leu, de 3 lei, de 5 lei și așa mai departe. Să observăm însă că în timp ce numărătoarea făcută la întîmplare avea un caracter mai elementar, implicînd doar operații de adunare, numărătoarea după a doua metodă, a grupării monezilor după valoarea lor, este ceva mai puțin elementară, implicînd și operații de înmulțire.

Analogia de mai sus, imaginată chiar de Lebesgue, este de natură să ne călăuzească pașii mai departe. Ordinea întîmplătoare în care monezile sînt scoase din buzunar este ordinea — întîmplătoare, neesențială pentru problema integrării — de la stînga la dreapta, a punctelor din $[a, b]$. Gruparea monezilor după valoarea lor ne sugerează gruparea punctelor din $[a, b]$ după valorile corespunzătoare ale funcției $f$. Deoarece o funcție ia în general o infinitate de valori, iar noi dorim ca numărul grupelor pe care le formăm să fie finit, vom proceda în modul următor. Presupunînd, pentru simplificare, că funcția $f$ este mărginită, vom

considera un interval $[A,B]$ cu proprietatea $A<m<M<B$, unde $m$ și $M$ sînt marginile funcției $f$ pe $[a, b]$. Vom considera apoi o diviziune $\delta = (m = y_0<y_1< \ldots <y_i<y_{i+1}< < \ldots < y_m = M)$ și vom asocia acestei diviziuni șirul de mulțimi $E_0, E_1, \ldots, E_i, E_{i+1}, \ldots E_{m-1}$, unde mulțimea $E_i$ conține exact acele puncte $x$ din $[a, b]$, pentru care $y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}$. Mulțimile $E_i$ $(0 \leqslant i < m)$ sînt disjuncte două cîte două, iar reuniunea lor este tocmai intervalul $[a, b]$, deci ele definesc o partiție a lui $[a, b]$. Dar, așa cum numărătoarea banilor devine mai practică sacrificînd ceva din caracterul elementar al operațiilor, observăm că în procedeul de mai sus natura mulțimilor $E_i$ este, în general, mai complicată decît a mulțimilor corespunzătoare din procedeul lui Riemann; într-adevăr, acestea din urmă sînt totdeauna intervale (anume, intervalele $[x_0, x_1), [x_1, x_2) \ldots, [x_i, x_{i+1}), \ldots, [x_{n-2}, x_{n-1})$ și $[x_{n-1}, x_n])$, în timp ce mulțimile $E_i$ se complică o dată cu funcția $f$.

Să vedem acum în ce fel se poate valorifica ideea de mai sus în generalizarea și ameliorarea procesului de integrare. Lebesgue și-a dat seama — și aceasta este a doua mare idee pe care acest savant a introdus-o în teoria integralei — că teoria integralei trebuie precedată de o teorie generală a măsurii mulțimilor, o teorie care să ne învețe să dăm un sens conceptului de măsură pentru mulțimi cît mai generale, așa cum matematica elementară ne învață să definim lungimea unui interval, aria unui domeniu poligonal și volumul unui domeniu poliedral.

Bineînțeles că o astfel de teorie generală a măsurii va trebui să satisfacă anumite cerințe logice și intuitive. De pildă: să furnizeze pentru intervale, domenii poligonale sau poliedrale aceeași măsură pe care o furnizează și matematica elementară; fiind dată o descompunere a unei mulțimi măsurabile $A$ într-un număr finit sau numărabil d emulțimi disjuncte $A_i$, de asemenea măsurabile, măsura lui $A$ să fie egală cu suma măsurilor mulțimilor $A_i$ (proprietatea de aditivitate).

Despre mulțimile cărora li se poate atribui o măsură (vom vedea în paragraful următor cum anume se poate construi o teorie a măsurii) vom spune că sînt măsurabile. Despre o funcție $f$ pentru care mulțimile $\{x; \alpha \leqslant f(x) < \beta\}$ sînt mă-

surabile, oricare ar fi numerele $\alpha$ și $\beta$ (inclusiv cazurile $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$), vom spune că este o funcție măsurabilă. Această definiție a măsurabilității unei funcții se inspiră, după cum se poate vedea ușor, din natura mulțimilor $E_i$ de mai sus; într-adevăr, avem $E_i = \{x;\ y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}\}$, deci funcția $f$ este măsurabilă, atunci putem atribui mulțimilor $E_i$ o măsură, fie aceasta $m(E_i)$. Acum este suficient să formăm sumele

$$s_\delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1} y_i m(E_i) \tag{8}$$

$$S_\delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1} y_{i+1} m(E_i) \tag{9}$$

sume care constituie un analog al sumelor Darboux din teoria integralei Riemann (a se vedea capitolul III). Le-am putea numi sume Darboux-Lebesgue; suma (8) este o sumă Darboux-Lebesgue inferioară, iar suma (9) este o sumă Darboux -Lebesgue superioară. Ca și la sumele Darboux obișnuite, avem și aici inegalitatea

$$s_\delta(f) \leqslant S_\delta(f).$$

Continuînd această analogie cu sumele Darboux obișnuite și observînd că nici o sumă $s_{\delta'}$, nu poate întrece o sumă $S_{\delta''}$ (exercițiu!), vom spune că funcția $f$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$ dacă marginea superioară a sumelor Darboux-Lebesgue inferioare este egală cu marginea inferioară a sumelor Darboux-Lebesgue superioare. Putem da de pe acum o teoremă care arată puterea și eleganța noului tip de integrabilitate: orice funcție mărginită și măsurabilă pe $[a, b]$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$. Într-adevăr, avem

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) = \sum_{i=0}^{m-1} (y_{i+1} - y_i) m(E_i)$$

deci, pentru diviziuni $\delta$ cu norma mai mică decît $\varepsilon > 0$, avem

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} m(E_i).$$

Însă, ţinînd seama de proprietatea de aditivitate a măsurii, avem

$$\sum_{i=0}^{m-1} m(E_i) = b - a,$$

deci

$$S_\delta(f) - s_\delta(f) < \varepsilon(b - a),$$

oricare ar fi diviziunea $\delta$, de normă mai mică decît $\varepsilon$, a intervalului $[A, B]$. Aşadar

$$\sup_\delta s_\delta(f) = \inf_\delta S(f)$$

şi funcţia $f$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$.

Însă succesul procedeului de mai sus depinde de posibilitatea de a defini o noţiune de măsură în raport cu care clasa funcţiilor măsurabile să conţină o parte cît mai mare dintre funcţiile uzuale şi, bineînţeles, să conţină toate funcţiile integrabile Riemann. Această problemă a fost rezolvată la începutul secolului nostru de către Lebesgue, şi ei îi dedicăm paragraful următor.

## MĂSURA LEBESGUE

Pentru comoditate, ne vom restrînge la mulţimi ale dreptei numerice, dar cititorul îşi va da uşor seama că toate consideraţiile se extind la mulţimi din plan sau din spaţiu.

Matematica elementară ne învaţă să atribuim o lungime oricărui interval, o arie oricărui domeniu poligonal, un volum oricărui corp poliedral. Vom presupune aceste lucruri cunoscute, totuşi observăm că şi aici sînt unele aspecte delicate, peste care un începător în matematică trece fără a manifesta prea multă exigenţă. Vom ilustra această situaţie prin două exemple.

Dacă definim aria unui triunghi ca jumătate din produsul unei laturi prin înălţimea corespunzătoare, atunci pentru a legitima definiţia pusă, este necesar să arătăm că produsul dintre o latură a unui triunghi şi înălţimea corespunzătoare nu depinde de latura considerată. Mai departe,

definind aria unui poligon ca sumă a ariilor triunghiurilor în care se descompune poligonul considerat, este necesar să arătăm că valoarea acestei sume nu depinde de modul în care se face descompunerea poligonului în triunghiuri (există o infinitate de descompuneri de acest fel). De obicei, matematica școlară trece ușor peste lucruri de acest fel, dar în cărțile mai amănunțite și mai riguroase (cum este, de exemplu, tratatul de geometrie elementară (—citat în capitolul III — al marelui matematician francez Jacques Hadamard) aceste probleme sînt cercetate cu toată atenția. Neplăcut în aceste situație nu este atît faptul că astfel de probleme nu sînt rezolvate în cadrul manualelor școlare (probabil că cel puțin la clase mai mici nici nu este cazul să se facă așa ceva), cît faptul că nu reușim să dezvoltăm la elevi (și uneori nici la studenți!) acel grad de exigență care să-i conducă să-și pună singuri asemenea probleme. Exigența față de definiții este foarte scăzută la cei mai mulți începători în matematică. Chiar mulți dintre elevii și studenții sîrguincioși, care urmăresc cu grijă desfășurarea unei demonstrații matematice, căutînd să-i înțeleagă fiecare pas, meditează insuficient asupra definițiilor care se introduc în matematică, hrănindu-se (poate subconștient) cu ideea greșită că definițiile matematice sînt arbitrare. În fapt, o definiție matematică sintetizează o îndelungată experiență intuitivă și logică, ea constituie una dintre modalitățile prin care matematica își trage seva din lumea înconjurătoare.

Să ne întoarcem acum la problema măsurii. Este limpede că punctul de plecare îl vor constitui mulțimile pentru care știm să definim măsura. Pe dreaptă, singurele mulțimi de acest fel sînt intervalele. Însă, de aici nu-i decît un pas pînă la definiția unei măsuri pentru orice mulțime a acestei drepte, care se poate reprezenta ca o reuniune finită sau numărabilă de intervale. O astfel de mulțime $A$ se poate reprezenta totdeauna ca o reuniune finită sau numărabilă de intervale $I_n$ disjuncte. Notînd cu $a_n$ și $b_n$ extremitățile intervalului $I_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), vom defini măsura $m(A)$ a mulțimii $A$ prin egalitatea

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n). \qquad (10)$$

Se poate arăta că valoarea $m(A)$ nu depinde de modul în care mulţimea $A$ este descompusă în intervale disjuncte. Prin definiţia pusă n-am făcut decît să postulăm, să impunem (într-un caz particular) proprietatea de aditivitate a măsurii, proprietate care îşi are rădăcinile în experienţa intuitivă pe care au dobîndit-o oamenii relativ la operaţia de măsurare.

Fie $G$ o mulţime a dreptei care se poate reprezenta ca o reuniune finită sau numărabilă de intervale deschise şi disjuncte două cîte două. Despre $G$ se spune că este o mulţime deschisă. Ei i se atribuie o măsură prin relaţia (10) de mai sus, deoarece orice mulţime deschisă este de tipul mulţimilor $A$ la care ne-am referit.

Însă nu orice parte a dreptei numerice este o mulţime deschisă. De exemplu, mulţimea punctelor de abscisă raţională nu este deschisă. Vom încerca atunci un proces de aproximare a unei mulţimi arbitrare prin mulţimi deschise. Fie $E$ o mulţime oarecare a dreptei numerice. Există eel puţin o mulţime deschisă care conţine pe $E$: aceasta cste dreapta numerică. Să considerăm, pentru fiecare mulţime deschisă $G$ care conţine pe $E$, măsura $m(G)$ definită de (10). Deoarece, oricare ar fi $G$, valoarea $m(G)$ este nenegativă, rezultă că mulţimea valorilor $m(G)$ obţinute pentru toate mulţimile deschise $G$ care conţin pe $E$ este o mulţime mărginită inferior şi deci, conform unei teoreme cunoscute din analiza matematică elementară, ea admite o margine inferioară. Această margine inferioară o vom nota $m_e(E)$ şi o vom numi măsura exterioară a mulţimii $E$:

$$m_e(E) = \inf_{G \supseteq E} m(G). \tag{11}$$

Următoarele două proprietăţi pot fi uşor verificate de către cititor: 1) dacă $A$ este un interval, atunci $m(A)$ dată de (10) coincide cu lungimea obişnuită a lui $A$; 2) pentru orice mulţime $A$, care este o reuniune finită sau numărabilă de intervale disjuncte (în particular, pentru orice mulţime $A$ deschisă), avem $m(A) = m_e(A)$.

Pentru a ajunge la conceptul de măsurabilitate Lebesgue, ne vom concentra atenţia asupra diferenţei $G—E$, unde $E$ este o mulţime arbitrară, iar $G$ este o mulţime deschisă

arbitrară, care conține pe $E$. Deoarece conceptul de măsură exterioară are sens pentru orice mulțime a dreptei numerice, el va avea sens și pentru $G—E$; deci are sens expresia $m_e(G—E)$. Măsurabilitatea mulțimii $E$ revine, în concepția lui Lebesgue, la posibilitatea de a alege mulțimea deschisă $G$ care conține pe $E$ în așa fel, încît măsura exterioară a lui $G—E$ să fie oricît de mică dorim. Mai precis, mulțimea $E$ este măsurabilă (în sensul lui Lebesgue), dacă pentru fiecare număr pozitiv $\varepsilon$ există o mulțime deschisă $G$ care conține pe $E$ și pentru care $m_e (G—E) < \varepsilon$. Pentru orice mulțime $E$ măsurabilă Lebesgue măsura ei Lebesgue este egală, prin definiție, cu măsura exterioară a lui $E$ și se notează $m(E)$.

Un întreg program de cercetare se impune acum. Astfel, se demonstrează că orice interval și orice mulțime deschisă sînt mulțimi măsurabile Lebesgue. Măsura Lebesgue a unui interval coincide cu lungimea sa, iar măsura Lebesgue a unei mulțimi deschise coincide cu cea dată de (10). Fiind dat un șir $E_1, E_2, ..., E_n, ..$, de mulțimi măsurabile Lebesgue, reuniunea lor $E$ este de asemenea măsurabilă Lebesgue. Dacă în plus, mulțimile $E_n$ sînt disjuncte două cîte două, atunci $m(E) = m(E_1) + m(E_2) - ... + m(E_n) + ...$ (proprietatea de aditivitate numărabilă a măsurii Lebesgue). Dacă mulțimile $A$ și $B$ sînt măsurabile Lebesgue și dacă $A \subset B$, atunci $m(A) \leqslant m(B)$ (proprietatea de monotonie a măsurii Lebesgue); într-adevăr, avem $B = A \cup (B - A)$ deci, în baza proprietății de aditivitate, $m(B) = m(A) + M(B - A)$ și, ținînd seama că măsura Lebesgue nu poate lua valori negative, rezultă că $m(A) \leqslant m(B)$. Să mai observăm că orice mulțime $A$ de măsură nulă (în sensul considerat în teorema lui Lebesgue de integrabilitate riemanniană) este măsurabilă Lebesgue și $m(A) = 0$. Reciproc, dacă $m(A) = 0$, atunci $A$ este de măsură nulă.

### CÎT DE LARGĂ ESTE CLASA MULȚIMILOR MĂSURABILE LEBESGUE?

Acum, după ce cunoaștem conceptul de măsurabilitate introdus de Lebesgue, se pune în mod natural următoarea întrebare: Este acest concept suficient de larg pentru ca

orice mulţime a dreptei numerice să fie măsurabilă? În cazul contrar, este clasa mulţimilor măsurabile Lebesgue suficient de largă, de bogată, pentru ca ea să înglobeze toate mulţimile care intervin în problemele importante de matematică, mulţimi a căror întindere se cere a fi măsurată?

Să ne ocupăm mai întîi de prima întrebare. Răspunsul la ea este negativ, după cum a arătat la începutul secolului nostru (nu mult timp după introducerea de către Lebesgue a conceptului de măsurabilitate) matematicianul italian Vitali. Demonstraţia lui Vitali este atît de ingenioasă şi de instructivă, atît de semnificativă din punct de vedere metodologic şi chiar filozofic, încît nu ne putem opri de a o expune aici.

Înainte de a trece la demonstraţia lui Vitali, vom menţiona o proprietate foarte importantă a măsurii Lebesgue, proprietate care va interveni esenţial în cele ce urmează:

Dacă mulţimea $H$ se obţine din mulţimea $E$ printr-o translaţie şi dacă $E$ este măsurabilă Lebesgue, atunci $H$ este de asemenea măsurabilă Lebesgue şi $m(H) = m(E)$.

Într-adevăr, este suficient să observăm mai întîi că teorema este adevărată în cazul în care $E$ şi $H$ sînt intervale. De aici rezultă că teorema este adevărată şi pentru mulţimi deschise, deoarece măsura unei mulţimi deschise se exprimă, prin relaţia (10), cu ajutorul lungimilor unor intervale. În sfîrşit, din faptul că $H$ se obţine din $E$ printr-o translaţie, rezultă că orice mulţime deschisă care conţine pe $H$ (sau pe $E$) se obţine, printr-o translaţie, dintr-o mulţime deschisă care conţine pe $E$ (respectiv pe $H$), şi teorema rezultă în toată generalitatea ei.

Vom numi proprietatea de mai sus *proprietatea de invarianţă a măsurii Lebesgue în raport cu o translaţie.*

Să considerăm mulţimea $A$ a punctelor din intervalul $[0, 1]$ şi să introducem în $A$ o relaţie de echivalenţă, după cum urmează. Două puncte din $A$ sînt echivalente, dacă abscisele lor diferă printr-un număr raţional. Ţinînd seamă că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă, rezultă că fiecare clasă de echivalenţă este o mulţime numărabilă. Însă mulţimea $A$ este, după cum se ştie, nenumărabilă; deci mulţimea claselor de echivalenţă este şi ea nenumărabilă (deoarece o reuniune numărabilă de mulţimi numă-

rabile este de asemenea o mulţime numărabilă). Presupunînd că s-a introdus în fiecare clasă de echivalenţă o anumită corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale, să notăm cu $A_n$ mulţimea care conţine, din fiecare clasă de echivalenţă, exact acel element care este asociat numărului natural $n$. Rezultă că fiecare mulţime $A_n$ este nenumărabilă, şi

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{12}$$

Vom demonstra că printre mulţimile $A_n$ există cel puţin una care nu este măsurabilă Lebesgue. Vom proceda prin reducere la absurd. Să admitem că toate mulţimile $A_n$ sînt măsurabile Lebesgue. Dacă am avea $m(A_n) = 0$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ ar rezulta, în baza proprietăţii de aditivitate numărabilă a măsurii Lebesgue, că $m(A) = 0$, ceea ce ar veni în contradicţie cu faptul că $A$ este un interval de lungime egală cu 1. Există deci cel puţin o valoare a lui $n$ — fie ea $p$ (dar nu putem preciza valoarea lui $p$) — pentru care $m(A_p) > 0$. Să punem, pentru simplitate, $A_p = B$. Avem deci $m(B) > 0$. Să notăm cu $B_n$ mulţimea obţinută din $B$ printr-o translaţie de mărime $\frac{1}{n}$. (Aceasta înseamnă că abscisele punctelor din $B_n$ sînt de forma $x + \frac{1}{n}$, unde $x$ parcurge pe $B$.) În baza proprietăţii de invarianţă a măsurii Lebesgue în raport cu o translaţie, rezultă că fiecare mulţime $B_n$ este măsurabilă Lebesgue şi $m(B_n) = m(B)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Vom arăta acum că mulţimile $B_n$ sînt disjuncte două cîte două. Într-adevăr, să admitem că există un punct $a$ comun mulţimilor $B_s$ şi $B_t$, deşi $s \neq t$. Din apartenenţa lui $a$ la $B_s$ rezultă existenţa unui element $b$ din $B$, pentru care $a = b + \frac{1}{s}$. Din apartenenţa lui $a$ la $B_t$ rezultă existenţa unui element $c$ din $B$, pentru care $a = c + \frac{1}{t}$. Rezultă că $b + \frac{1}{s} = c + \frac{1}{t}$, unde $s$ şi $t$ sînt numere

naturale, deci diferenţa $b - c$ este un număr raţional, deci $b$ şi $c$ aparţin aceleiaşi clase de echivalenţă. Dar să nu uităm că $B$ este egală cu mulţimea $A_p$, deci cu o mulţime care conţine cîte un element *şi numai cîte unul* din fiecare clasă de echivalenţă; deci $b = c$, de unde rezultă că $s = t$. Am ajuns astfel la o contradicţie (prin ipoteză, $s \neq t$) deci mulţimile $B_n$ sînt disjuncte două cîte două.

O ultimă observaţie relativă la mulţimea $B_n$: din faptul că $B$ este conţinută în $A$ rezultă că fiecare mulţime $B_n$ este conţinută în intervalul [0, 2].

Folosind proprietăţile stabilite mai sus şi bazîndu-ne pe proprietatea de aditivitate numărabilă a măsurii Lebesgue, rezultă (notînd cu $D$ reuniunea mulţimilor $B_n$): $m(D) = m(B_1) + m(B_2) + \ldots + m(B_n) + \ldots = m(B) + m(B) + \ldots + m(B) + \ldots = + \infty$. Însă mulţimea $D$ este conţinută în intervalul [0,2], deci, în baza proprietăţii de monotonie a măsurii Lebesgue, măsura Lebesgue a mulţimii $D$ nu poate fi mai mare ca 2. Am ajuns astfel la o contradicţie, care arată că cel puţin una dintre mulţimile $A_n$ (dar nu ştim care anume dintre ele!) nu este măsurabilă Lebesgue. Teorema lui Vitali este astfel demonstrată.

Să facem acum cîteva observaţii pe marginea demonstraţiei de mai sus. Ceea ce atrage în primul rînd atenţia este caracterul ei neefectiv, neconstructiv. Demonstraţia nu furnizează un exemplu individual de mulţime nemăsurabilă Lebesgue. Trebuie să spunem că matematicianul polonez Waclaw Sierpiński, reluînd şi aprofundînd demonstraţia de mai sus, a reuşit să arate, între altele, că toate mulţimile $A_n$ sînt nemăsurabile Lebesgue. Dar nici prin acest fapt existenţa mulţimilor nemăsurabile Lebesgue nu a căpătat un caracter constructiv. Într-adevăr, să ne amintim cum am obţinut mulţimile $A_n$. A fost necesar, în prealabil, să fixăm în fiecare clasă de echivalenţă o anumită corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale. Dar există o infinitate de clase de echivalenţă, deci nu putem lua pe rînd fiecare clasă pentru a alege, pentru fiecare în parte, o corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale, deoarece în felul acesta nu am termina niciodată. Totuşi, noi am admis existenţa acestei infinităţi de alegeri, fără de care demonstraţia nu ar fi putut continua. În postula-

rea existenței acestei infinități de alegeri se ascunde unul din faptele primare, deosebit de profunde, ale raționamentelor cu mulțimi infinite, fapt descoperit de către matematicianul german Ernst Zermelo în primul deceniu al secolului nostru. Zermelo a observat că numeroase modalități de raționament utilizate în studiul mulțimilor infinite revin, în ciuda aparentei lor diversități, la una și aceeași schemă:

Fiind dată o familie $\mathcal{F}$ de mulțimi nevide și disjuncte, există o mulțime $A$ care conține cîte un element și numai unul din fiecare mulțime a lui $\mathcal{F}$.

Multă vreme matematicienii au încercat să demonstreze acest enunț, să-l transforme într-o teoremă, dar toate încercările au eșuat și enunțul a rămas în matematică sub denumirea de *Axioma alegerii* sau *axioma lui Zermelo.* Nu este greu de văzut că existența mulțimilor $A_n$ din demonstrația lui Vitali se bazează tocmai pe utilizarea axiomei lui Zermelo.

Pentru a da o imagine mai clară despre natura acestei axiome, să considerăm următorul exemplu. Să asociem fiecărei funcții reale $f$, de o variabilă reală, funcția opusă $-f$. Să considerăm mulțimea $M$ a cuplelor $<f, -f>$ și să ne propunem să construim o mulțime $N$ care conține cîte un element și numai unul din fiecare cuplu. Încercarea de a *construi* o astfel de mulțime nu reușește, dar axioma alegerii ne asigură de *existența* mulțimii $N$.

Se pune în mod natural întrebarea dacă nu cumva, folosind o altă metodă de demonstrație decît cea propusă de Vitali, nu am putea stabili, pe o cale constructivă, existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue. Dar, deși cunoaștem în prezent numeroase căi care conduc la existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue, nici una din aceste căi nu poate evita folosirea axiomei alegerii. Cu alte cuvinte mulțimile nemăsurabile Lebesgue sînt dincolo de granițele matematicii efective, constructive.

Astăzi, natura logică a axiomei alegerii este complet elucidată. În urmă cu aproape trei decenii, matematicianul de origine austriacă Kurt Gödel a demonstrat că axioma alegerii nu poate fi infirmată, în sensul că dacă sistemul de axiome al teoriei mulțimilor este necontradictoriu (nici acest fapt nu este încă elucidat!), atunci el rămîne necon-

tradictoriu prin adăugarea, ca o nouă axiomă, a axiomei alegerii. În urma rezultatului lui Gödel, devenea clar că nu ne puteam aștepta la o teoremă care să afirme falsitatea axiomei alegerii. Mai rămînea să se lămurească situația negației axiomei alegerii. În urmă cu cîțiva ani, matematicianul american Paul Cohen a rezolvat această problemă, demonstrînd că dacă sistemul de axiome al teoriei mulțimilor este necontradictoriu, atunci el rămîne necontradictoriu prin adăugarea, ca o nouă axiomă, a negației axiomei alegerii. Pentru acest rezultat, precum și pentru alte rezultate, Paul Cohen a fost distins la Congresul internațional al matematicienior din 1966, de la Moscova, cu medalia Fields, cea mai înaltă distincție internațională care se acordă, pentru descoperiri în domeniul matematicii, exclusiv matematicienilor sub 40 de ani.

Combinînd rezultatele lui Gödel și Cohen, rezultă că axioma alegerii constituie o propoziție independentă, în sensul că nici ea, nici negația ei nu sînt contradictorii. Avem deci două matematici, una care adoptă axioma alegerii, alta care adoptă negația ei. Existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue a fost stabilită în cadrul primei.

Situația axiomei alegerii este deci asemănătoare, în teoria mulțimilor, cu aceea a postulatului lui Euclid în geometrie; rezultatele lui Gödel și Cohen corespund descoperirilor lui Lobacevski și Bolyai. Însă, în timp ce domeniul geometriilor neeuclidiene este destul de clar conturat, avem deocamdată o imagine destul de confuză despre cele două matematici corespunzătoare adoptării, respectiv neadoptării axiomei alegerii. În bună măsură, această situație este datorită faptului că nu dispunem de o evidență clară a propozițiilor matematice în a căror demonstrație intervine axioma alegerii și, chiar în cazul multor propoziții despre care sîntem conștienți că au fost stabilite cu ajutorul axiomei alegerii, nu știm dacă ele n-ar putea fi stabilite și fără această axiomă.

Teorema lui Vitali ne atrage atenția asupra dificultății de a ne întîlni cu mulțimi nemăsurabile Lebesgue. Această situație este confirmată de un ansamblu de teoreme relative la comportarea mulțimilor măsurabile Lebesgue față de diferite operații cu mulțimi. Astfel, se demonstrează că

orice reuniune finită sau numărabilă și orice intersecție finită sau numărabilă de mulțimi măsurabile Lebesgue sînt de asemenea mulțimi măsurabile Lebesgue, iar diferența a două mulțimi măsurabile Lebesgue este măsurabilă Lebesgue. Orice mulțime finită sau numărabilă este de măsură Lebesgue nulă, orice interval este o mulțime măsurabilă Lebesgue. Mulțimile întîlnite în mod curent în analiză se obțin, pornind de la intervale, prin aplicarea de un număr oarecare de ori a operațiilor de reuniune finită sau numărabilă, intersecție finită sau numărabilă și trecere la complementară. Astfel de mulțimi se numesc boreliene, după numele matematicianului francez Emile Borel, care le-a introdus. Borel a construit și o teorie a măsurii pentru mulțimile care-i poartă numele, teorie care ia ca punct de plecare măsura elementară a intervalelor. După cum s-a putut arăta, orice mulțime boreliană este măsurabilă Lebesgue, iar măsura ei Borel coincide cu măsura ei Lebesgue. Există însă mulțimi măsurabile Lebesgue care nu sînt boreliene. Nu insistăm asupra acestui fapt, deoarece el va fi tratat în capitolul V, unde se va arăta că unele probleme de analiză conduc la considerarea unor mulțimi măsurabile Lebesgue neboreliene. Se poate arăta că familia mulțimilor boreliene este de puterea continuului, în timp ce familia mulțimilor măsurabile Lebesgue este de putere superioară continuului; cu alte cuvinte, prima dintre aceste familii poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor reale, în timp ce a doua dintre ele nu poate fi pusă în corespondență biunivocă cu nici o mulțime de numere reale.

## CÎTE CEVA DESPRE MĂSURABILITATEA LEBESGUE A FUNCȚIILOR

Acum, după ce am dobîndit anumite cunoștințe despre măsurabilitatea și măsura Lebesgue a mulțimilor, să ne întoarcem la problema care a cerut studiul acestei măsurabilități, anume la problema măsurabilității funcțiilor, așa cum a fost pusă ea de către Lebesgue. Ne amintim că succesul metodei lui Lebesgue era condiționat de posibilitatea de a lărgi cît mai mult clasa mulțimilor pentru care

putem defini în mod natural o măsură, în așa fel încît cît mai multe dintre funcțiile uzuale să fie măsurabile.

Ne așteptăm acum ca măsura Lebesgue să dea un răspuns satisfăcător acestei probleme, deoarece mulțimile întîlnite în mod obișnuit în analiză sînt măsurabile Lebesgue. Aceasta face ca și funcțiile întîlnite în mod obișnuit să fie măsurabile Lebesgue, adică să fie de așa natură, încît mulțimile de forma $\{x: a \leqslant f(x) < b\}$ (aceste mulțimi se numesc *mulțimile Lebesgue asociate funcției f*) să fie măsurabile Lebesgue, oricare ar fi $a$ și $b$ (finite sau infinite). Să schițăm, pentru unele tipuri de funcții uzuale, modul în care se stabilește măsurabilitatea lor Lebesgue. Dacă $f$ este continuă, orice mulțime Lebesgue a ei este intersecția dintre o mulțime închisă și una deschisă, deci este măsurabilă Lebesgue. Dacă $f$ este monotonă, mulțimile ei Lebesgue sînt intervale, deci mulțimi măsurabile Lebesgue. Se poate arăta că operațiile algebrice de sumă, diferență și produs, aplicate funcțiilor măsurabile Lebesgue, conduc tot la funcții măsurabile Lebesgue. Raportul dintre două funcții măsurabile Lebesgue, dintre care a doua nu se anulează, este de asemenea o funcție măsurabilă Lebesgue. Aceste proprietăți sînt naturale, ele nu constituie o surpriză, deoarece le-am întîlnit și la funcții continue, și la funcții derivabile, și la alte clase de funcții studiate în analiză. Există însă o proprietate care distinge net măsurabilitatea Lebesgue de proprietățile de continuitate, derivabilitate sau integrabilitate riemanniană. Se știe că nici una dintre aceste din urmă proprietăți nu este invariantă prin trecere la limită; limita unui șir convergent de funcții continue (sau derivabile, sau integrabile Riemann) nu este obligatoriu o funcție continuă (respectiv derivabilă, integrabilă Riemann). Se poate arăta însă că limita unui șir convergent de funcții măsurabile Lebesgue este totdeauna o funcție măsurabilă Lebesgue. Acest fapt conferă o deosebită simplitate și eleganță clasei funcțiilor măsurabile Lebesgue; această clasă este închisă nu numai față de operațiile algebrei, dar și față de operațiile analizei (trecerea la margine inferioară sau superioară; trecerea la limită inferioară sau superioară). Dintre operațiile uzuale, numai una ne poate

scoate din clasa funcţiilor măsurabile Lebesgue: operaţia de suprapunere. Din faptul că $f$ este măsurabilă Lebesgue pe $[a, b]$, iar $g$ este măsurabilă Lebesgue pe un interval care conţine valorile lui $f$, nu rezultă că funcţia $h$ dată de $h(x) = g(f(x))$ este măsurabilă Lebesgue pe $[a, b]$. Mai mult decît atît, se poate arăta că orice funcţie reală de o variabilă reală este o suprapunere a două funcţii măsurabile Lebesgue. Acest fapt produce dificultăţi în stabilirea teoremelor de schimbare de variabilă la integrala Lebesgue (se ştie că în aceste teoreme intervine operaţia de suprapunere), dar dificultăţi similare apar şi atunci cînd vrem să stabilim teoreme cît mai generale de schimbare de variabilă la integrala Riemann, deoarece nici suprapunerea a două funcţii integrabile Riemann nu este totdeauna o funcţie integrabilă Riemann (mai mult decît atît, se poate arăta că orice funcţie reală, mărginită, de o variabilă reală, este suprapunerea a două funcţii integrabile Riemann). Deci nu putem interpreta această dificultate ca o inferioritate a integralei Lebesgue faţă de integrala Riemann.

Folosind invarianţa măsurabilităţii Lebesgue faţă de operaţiile algebrei şi analizei, putem stabili noi clase de funcţii uzuale măsurabile Lebesgue. Astfel, orice funcţie cu variaţie mărginită este măsurabilă Lebesgue, fiind diferenţa a două funcţii monotone (deci măsurabile Lebesgue). Orice funcţie derivată este măsurabilă Lebesgue, fiind limita unui şir convergent de funcţii continue (deci măsurabile Lebesgue). Orice funcţie semicontinuă este măsurabilă Lebesgue, fiind limita unui şir de funcţii continue. Se poate arăta că şi funcţiile integrabile Riemann sînt măsurabile Lebesgue. Deoarece, după cum am văzut, orice funcţie mărginită, măsurabilă Lebesgue, este integrabilă Lebesgue şi, ţinînd seama că orice funcţie integrabilă Riemann este mărginită, rezultă că orice funcţie integrabilă Riemann este integrabilă Lebesgue. Se poate arăta că integrala Riemann este egală cu integrala Lebesgue a funcţiei considerate, ceea ce arată că integrala Lebesgue este o extensiune a integralei Riemann. Această extensiune este efectivă, deoarece există funcţii integrabile Lebesgue care nu sînt integrabile Riemann. Astfel, funcţia egală cu 1

pentru $x$ rațional și egală cu zero pentru $x$ irațional nu este integrabilă Riemann, pe nici un interval, deoarece ea e discontinuă în orice punct, dar este integrabilă Lebesgue pe orice interval, deoarece mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale sînt mulțimi boreliene, deci măsurabile Lebesgue și, după cum se poate vedea ușor, orice mulțime Lebesgue a funcției considerate se obține din aceste două mulțimi prin operații algebrice simple.

Trebuie să observăm totuși că chiar unele proprietăți studiate în analiza clasică pot conduce la funcții nemăsurabile Lebesgue. Nu vom insista aici asupra acestui fapt, menționăm doar că există funcții cu proprietatea lui Darboux care nu sînt măsurabile Lebesgue pe nici un interval.

Modul în care s-a definit măsurabilitatea Lebesgue a unei funcții nu lasă să se vadă ușor în ce constă structura intimă a unei funcții măsurabile Lebesgue. Această structură n-a putut fi detectată decît cu mari eforturi, concretizate într-o teoremă a lui Luzin și o alta datorită lui Denjoy și Stepanov. Teorema lui Luzin afirmă, în esență, că orice funcție măsurabilă Lebesgue admite o restricție continuă pe o mulțime de măsură Lebesgue oricît de apropiată de aceea a intervalului de definiție a funcției. (Fiind dată o funcție $f: A \to B$ și o mulțime $D \subset A$, prin restricția lui $f$ la $D$ se înțelege funcția $\varphi: D \to B$, pentru care $\varphi(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in D$. Mai precis, dacă $f$ este măsurabilă Lebesgue pe $[a, b, ]$ atunci pentru orice număr pozitiv $\varepsilon$ există o mulțime închisă $F$ conținută în $[a, b]$, astfel încît restricția lui $f$ la $F$ să fie continuă iar măsura Lebesgue a diferenței $[a, b] — F$ să fie mai mică decît $\varepsilon$. Precizăm că prin continuitatea restricției lui $f$ la $F$ se înțelege faptul că pentru orice $x$ din $F$ și pentru orice șir $x_n$ de puncte din $F$ care tinde către $x$ șirul $f(x_n)$ tinde către $f(x)$.

Teorema lui Luzin permite să se compare din punct de vedere structural funcțiile integrabile Riemann și cele măsurabile Lebesgue. În timp ce primele sînt continue aproape peste tot, celelalte au o proprietate mai slabă, în sensul că proprietatea de continuitate nu are loc obligatoriu aproape peste tot, ci doar pe o mulțime de măsură oricît de apropiată de aceea a intervalului de definiție; în plus, la funcții măsurabile continuitatea nu se referă la funcția

considerată, ci la restricția ei la o anumită mulțime închisă.

Putem micșora deșeul din teorema lui Luzin, acea mulțime $[a, b] - F$ de măsură inferioară lui $\varepsilon$. Însă aceasta nu se poate obține decît cu prețul unei slăbiri a proprietății de continuitate, anume înlocuind continuitatea obișnuită prin continuitatea aproximativă sau asimptotică (definiția acestei noțiuni a fost dată în capitolul I). După cum s-a menționat în capitolul I, Denjoy a demonstrat că orice funcție măsurabilă este aproximativ continuă aproape peste tot. Stepanov a demonstrat că și reciproca este adevărată: orice funcție aproximativ continuă aproape peste tot este măsurabilă Lebesgue. Deci măsurabilitatea Lebesgue a unei funcții este echivalentă cu continuitatea ei aproximativă aproape peste tot.

## O COMPARAȚIE ÎNTRE INTEGRALA RIEMANN ȘI INTEGRALA LEBESGUE

Am văzut în paragraful precedent că integrala Lebesgue constituie o veritabilă extensiune a integralei Riemann. Totuși, din prezentarea dată pînă aici nu putem căpăta încă o imagine mai clară a imensului progres pe care l-a realizat Lebesgue în teoria integralei. Acest progres este atît de mare, încît chiar în multe probleme relative la integrala Riemann metodele promovate de Lebesgue duc mai repede și mai elegant la găsirea soluției.

În primul rînd, trebuie să eliminăm două restricții adoptate în expunerea de mai sus. „Teritoriul" natural pe care se studiază o funcție măsurabilă Lebesgue (și deci și integrala Lebesgue) nu este un interval, ci o mulțime măsurabilă Lebesgue. O examinare atentă a definițiilor date conceptelor de funcție măsurabilă Lebesgue și de integrală Lebesgue arată că nicăieri nu a intervenit faptul că teritoriul pe care se lucra era presupus un interval, ci doar proprietatea intervalelor de a fi mulțimi măsurabile Lebesgue.

Nici restricția mărginirii funcției nu este esențială. Se poate extinde conceptul de integrabilitate Lebesgue

și la funcții măsurabile nemărginite. Fie mai întîi o funcție $f$ măsurabilă Lebesgue şi pozitivă pe mulțimea măsurabilă $E$. Să notăm cu $f_n$ funcția egală cu $f$ în punctele în care valoarea lui $f$ este mai mică decît $n$ și egală cu $n$ în celelalte puncte din $E$. Şirul $f_n$ este monoton crescător (datorită faptului că funcția $f$ este pozitivă), iar funcțiile $f_n$ sînt mărginite și măsurabile Lebesgue. Deoarece — după cum se poate arăta ușor — integrala Lebesgue posedă, ca și integrala Riemann, proprietatea de monotonie, rezultă că șirul care are ca termen de rang $n$ integrala Lebesgue a funcției $f_n$ pe mulțimea $E$ este un șir monoton crescător, deci are limită. Valoarea acestei limite devine, prin definiție, integrala Lebesgue a funcției $f$ pe mulțimea $E$. Dacă această valoare este finită, spunem despre funcția $f$ că este integrabilă Lebesgue pe $E$.

Fie acum o funcție $h$ măsurabilă Lebesgue, dar în rest arbitrară, definită pe mulțimea măsurabilă Lebesgue $E$. Ca orice funcție reală, și funcția $h$ se poate scrie ca diferență a două funcții pozitive: $h = f - g$, unde $f = \frac{1}{2}(|h| + h)$ și $g = \frac{1}{2}(|h| - h)$. Nu este greu de văzut că funcțiile $f$ și $g$ sînt măsurabile Lebesgue. (Este suficient să observăm că modulul unei funcții măsurabile Lebesgue este de asemenea o funcție măsurabilă Lebesgue.) Vom spune că funcția $h$ este integrabilă Lebesgue pe $E$, dacă funcțiile $f$ și $g$ sînt integrabile Lebesgue pe $E$. În acest caz, integrala Lebesgue a funcției $h$ pe $E$ va fi, prin definiție, egală cu diferența integralelor Lebesgue ale funcțiilor $f$ și $g$ pe $E$. Dacă funcția $f$ (sau $g$) nu este integrabilă Lebesgue pe $E$, dar $g$ (respectiv $f$) este integrabilă Lebesgue pe $E$, vom spune că integrala Lebesgue a funcției $h$ este egală cu $+\infty$ (respectiv cu $-\infty$).

Despre o funcție integrabilă Lebesgue pe $E$ în sensul generalizat de mai sus se obișnuiește uneori să se spună că este sumabilă pe $E$. O teoremă importantă din teoria integralei Lebesgue afirmă că o funcție măsurabilă Lebesgue pe $E$ este sumabilă pe $E$, dacă și numai dacă modulul ei este o funcție sumabilă pe $E$.

După cum se știe, și integrala Riemann admite o extensiune la funcții nemărginite sau pe intervale nemărginite.

Numind integrabilitatea Riemann de acest tip „integrabilitate Riemann în sens generalizat“, este natural să ne întrebăm cum stă acest tip de integrabilitate față de integrabilitatea Lebesgue, în forma extinsă din paragraful de față. Poate contrar așteptărilor, trebuie să spunem că integrabilitatea Riemann în sens generalizat *nu* implică sumabilitatea Lebesgue. Pentru a ilustra această aserțiune, să considerăm funcția

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Se știe că această funcție este integrabilă Riemann în sens generalizat pe $[0, \infty)$, dar modulul ei nu mai are această proprietate; mai precis, integrala Riemann în sens generalizat a funcției $|f|$ pe $[0, \infty]$ este egală cu $+\infty$. De aici rezultă, cum e ușor de văzut, că și integrala Lebesgue a funcției $|f|$ este egală cu $+\infty$ pe intervalul $[0, \infty)$, deci că funcția $|f|$ nu este sumabilă pe intervalul $[0, \infty)$. Însă, în baza teoremei amintite mai sus, aceasta implică nesumabilitatea Lebesgue a funcției $f$ pe $[0, \infty)$.

Cu acest prilej, ne-am întîlnit cu o situație care marchează o deosebire esențială între integrala Riemann în sens generalizat și sumabilitatea Lebesgue. Noțiunea de semiconvergență, atît de importantă în studiul integralei Riemann în sens generalizat (a se vedea chiar exemplul funcției $f$ de mai sus), este absentă din teoria integralei Lebesgue. Trebuie însă să remarcăm că chiar în teoria integralei Riemann în sens generalizat semiconvergența apare numai în studiul funcțiilor de o variabilă; în ceea ce privește funcțiile de două sau mai multe variabile, datorită caracterului mult mai restrictiv pe care-l dobîndește în acest caz noțiunea de convergență a unei integrale, o funcție $f$ este integrabilă Riemann în sens generalizat pe un domeniu $D$, dacă și numai dacă $|f|$ este integrabilă Riemann în sens generalizat pe $D$.

Așa acum integrala Riemann poate fi studiată ca o funcție de intervalul pe care ea este definită, integrala Lebesgue poate fi și ea studiată ca o funcție de mulțimea mă-

surabilă pe care ea este definită. Se știe, în acest sens, că integrala Riemann este o funcție aditivă de interval. În ceea ce privește integrala Lebesgue, ea este aditivă nu numai ca funcție de interval, ci și ca funcție de mulțime măsurabilă Lebesgue și nu numai în raport cu un număr finit de mulțimi, ci și în raport cu o infinitate numărabilă de mulțimi măsurabile Lebesgue. Mai precis, dacă $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sînt mulțimi măsurabile Lebesgue disjuncte două cîte două, atunci, notînd cu $E$ reuniunea lor, orice funcție $f$ sumabilă pe $E$ este sumabilă pe fiecare $E_n$ și avem

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f + \ldots + \int_{E_n} f + \ldots,$$

unde integrala este concepută în sensul lui Lebesgue.

Această proprietate de aditivitate imprimă o deosebită eleganță calculului unei integrale Lebesgue. Vom ilustra această aserțiune prin două exemple: Fie mai întîi funcția lui Dirichlet, la care ne-am mai referit în capitolul de față: $f(x) = 1$, dacă $x$ este rațional, $f(x) = 0$, dacă $x$ este irațional. Am văzut că această funcție este măsurabilă Lebesgue; fiind și mărginită, ea este integrabilă Lebesgue pe orice interval. Ne propunem să calculăm valoarea integralei lui $f$ pe $[a, b]$. Fie $A$ mulțimea punctelor de abscisă rațională din $[a, b]$ și fie $B$ mulțimea punctelor de abscisă irațională din același interval. Mulțimile $A$ și $B$ sînt măsurabile Lebesgue și avem, în baza proprietății de aditivitate,

$$\int_a^b f = \int_A f + \int_B f.$$

Însă $f$ este constant egală cu 1 pe mulțimea $A$ și constant egală cu 0 pe $B$, deci

$$\int_A f = 0, \quad \int_B f = 0, \quad \int_a^b f = 0.$$

Vom da acum un alt exemplu, care va arăta eficacitatea teoremei de aditivitate a integralei Lebesgue ca funcție de mulțime, chiar în cazul integralei Riemann. Fie funcția

$g$ — deja considerată — egală cu 0 în origine și în orice punct irațional și egală cu $\frac{1}{q}$ în orice punct de abscisă $\frac{p}{q}$, unde $p$ și $q$ sînt numere întregi prime între ele, iar $q$ este strict pozitiv. Funcția $g$ este continuă în orice punct irațional; fiind și mărginită, ea este integrabilă Riemann pe orice interval compact al dreptei numerice. Desigur că am putea evalua integrala Riemann a funcției $g$ pe un interval $[a, b]$ pornind chiar de la definiția integralei Riemann, adică formînd sumele Riemann corespunzătoare și studiind comportarea lor. Dar mai rapid și mai elegant se obține valoarea integralei Riemann a funcției $g$ pe $[a, b]$, dacă privim această integrală în accepția ei de integrală Lebesgue. Într-adevăr, în acest caz, notînd cu $E$ mulțimea punctelor de abscisă irațională din $[a, b]$, avem, în baza teoremei de aditivitate,

$$\int_a^b g = \int_E g + \int_{[a,\, b] - E} g .$$

Dar mulțimea $[a, b] - E$ este de măsură nulă și este ușor de văzut că pe o mulțime de măsură nulă integrala Lebesgue a oricărei funcții este egală cu zero. Pe de altă parte, prima integrală din membrul al doilea este și ea egală cu zero, deoarece funcția $g$ este identic nulă pe $E$. Așadar, integrala lui $g$ pe $[a, b]$ este egală cu zero.

O altă proprietate importantă a integralei Lebesgue ca funcție de mulțime este proprietatea de continuitate absolută. Mai întîi trebuie să observăm că integrabilitatea Lebesgue este o proprietate ereditară, în sensul că dacă ea are loc pe o anumită mulțime măsurabilă, atunci are loc pe orice parte măsurabilă a acesteia. Fiind dată o funcție $F(E)$ definită pentru părțile măsurabile ale lui $A$, vom spune că ea este absolut continuă pe $A$, dacă valoarea ei în modul devine oricît de mică dorim atunci cînd măsura submulțimii $E$ a lui $A$ este suficient de mică; mai precis, fiecărui număr pozitiv $\varepsilon$ îi corespunde un număr pozitiv $\eta$, astfel încît din $E \subset A$ și $m(E) < \eta$ să rezulte $|F(E)| < \varepsilon$. O teoremă fundamentală afirmă că dacă

$f$ este o funcție sumabilă pe mulțimea măsurabilă $A$, atunci integrala Lebesgue

$$F(E) = \int_E f$$

este o funcție de mulțime absolut continuă pe $A$. Această proprietate nu constituie o surpriză, deoarece o întîlnim, într-o altă variantă, și la integrala Riemann. Dacă funcția reală $f$ de o variabilă reală este integrabilă — Riemann sau Lebesgue — pe $[a, b]$, atunci funcția

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

este absolut continuă pe $[a, b]$, în sensul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\eta > 0$, cu proprietatea că dacă $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ constituie un sistem finit de intervale disjuncte din $[a, b]$, pentru care $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \eta$, atunci $\sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon$ (a se vedea și capitolul III).

Există însă o deosebire esențială între integrala Riemann și integrala Lebesgue, în favoarea acesteia din urmă. Se poate demonstra că aditivitatea numărabilă, împreună cu continuitatea absolută caracterizează funcțiile de mulțime care sînt integrale Lebesgue; mai precis, fiind dată o funcție $F(E)$ definită pentru toate părțile măsurabile ale mulțimii măsurabile $A$, numărabil aditivă și absolut continuă pe $A$, există o funcție reală $f$ definită și sumabilă pe $A$, astfel încît

$$F(E) = \int_E f$$

pentru orice parte măsurabilă $E$ a lui $A$. În schimb, există funcții absolut continue de punct, care nu sînt integrale Riemann și nu se cunoaște nici o caracterizare structurală a funcțiilor de interval care sînt integrale Riemann (chiar în sens generalizat).

O altă problemă în care se manifestă superioritatea integralei Lebesgue față de integrala Riemann este aceea

a trecerii la limită sub semnul integralei. Fiind dat un șir de funcții reale $\{f_n\}$ integrabile Riemann pe $[a, b]$, convergent pe $[a, b]$ către o funcție $f$, este posibil ca funcția $f$ să nu fie integrabilă Riemann, iar în cazul în care $f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, este posibil ca integrala funcției $f$ pe $[a, b]$ să nu fie egală cu limita integralelor funcțiilor $f_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ pe $[a, b]$. Pentru ca aceste anomalii să nu se producă, este suficient ca în convergența șirului $\{f_n\}$ să se manifeste proprietatea de uniformitate, cu alte cuvinte pragul $N$ din definiția convergenței acestui șir să depindă numai de $\varepsilon$, *nu* și de punctul $x$ ales în $[a, b]$. Este adevărat că această condiție de uniformitate este doar suficientă — nu și necesară — pentru ca anomaliile semnalate să nu se producă, totuși nu se cunoaște nici o condiție suficientă mai simplă și totodată mai generală decît cea menționată. În schimb, o astfel de condiție mai simplă și mai generală pentru trecerea la limită sub semnul integralei a putut fi găsită pentru integrala Lebesgue, și ea se enunță în modul următor: dacă șirul de funcții $f_n$ sumabile pe $E$ converge pe $E$ către funcția $f$ și dacă funcțiile $f_n$ sînt egal majorate în modul de către o funcție sumabilă $g$, atunci integrala funcției $f$ pe $E$ este egală cu limita integralelor funcțiilor $f_n$ pe $E$.

În cazul particular în care $E$ este intervalul $[a, b]$, iar șirul $\{f_n\}$ converge uniform pe $[a, b]$, putem găsi cu ușurință o funcție sumabilă $g$ care majorează pe $[a, b]$ fiecare funcție $|f_n|$. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. În virtutea convergenței uniforme, există un număr natural $N$, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pentru orice $n > N_\varepsilon$ și pentru orice $x$ din $[a, b]$. Inegalitatea obținută se mai poate scrie $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Să notăm cu $g(x)$ pe cel mai mare dintre numerele $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$, ..., $|f_{N_\varepsilon}(x)|$, $|f(x) - \varepsilon|$, $|f(x) + \varepsilon|$. Funcția $g$ este sumabilă pe $[a, b]$ și avem, pentru orice număr natural $n$ și pentru orice $x$ din $[a, b]$, inegalitatea $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. Am demonstrat astfel că dacă un șir $\{f_n\}$ de funcții sumabile pe $[a, b]$ converge uniform pe $[a, b]$ către funcția $f$, atunci integrala funcției $f$ pe $[a, b]$ este tocmai limita integralelor funcțiilor $f_n$ pe $[a, b]$. Există însa șiruri de funcții sumabile, convergente pe $[a, b]$, egal majorate în modul de o funcție su-

mabilă, dar care nu converg uniform pe $[a, b]$. Rezultă că pentru trecerea la limită sub semnul integralei Lebesgue dispunem de condiții practice mai puțin restrictive decît cele folosite în cazul integralei Riemann.

O altă problemă în care se manifestă superioritatea integralei Lebesgue față de integrala Riemann este aceea a raportului dintre derivată și integrabilitate. Ne amintim că familia derivatelor integrabile Riemann este efectiv mai largă decît familia derivatelor continue, deci în orice caz integrala Riemann constituie, în această problemă, un progres în raport cu etapa Cauchy. Dar, după cum am văzut, există derivate mărginite care nu sînt integrabile Riemann. Deoarece orice derivată este o funcție măsurabilă Lebesgue și orice funcție mărginită și măsurabilă Lebesgue este integrabilă Lebesgue, rezultă că orice derivată mărginită este integrabilă Lebesgue. Deci clasa derivatelor integrabile Lebesgue este efectiv mai largă decît clasa derivatelor integrabile Riemann.

Fie acum o funcție reală $f$ integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Să punem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

O teoremă elementară din teoria integralei Riemann afirmă că $F$ este derivabilă în orice punct $x$ în care $f$ este continuă și avem $F'(x) = f(x)$. Însă funcția $f$, fiind integrabilă Riemann, este continuă aproape peste tot, deci avem, aproape peste tot, $F'(x) = f(x)$. Constatăm deci că divorțul dintre primitivă și integrală, care apărea în teoria lui Riemann, nu este chiar atît de grav: integrala, încetînd de a fi o „primitivă peste tot“, rămîne totuși o „primitivă aproape peste tot“ a funcției care figurează sub semnul integralei.

Să vedem ce se întîmplă dacă funcția $f$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$. În acest caz, funcția $F$ este absolut continuă, și o teoremă clasică, datorită de asemenea lui Lebesgue, ne asigură că o astfel de funcție este derivabilă aproape peste tot. Mai mult decît atît, se arată că avem, aproape peste tot pe $[a, b]$, $F'(x) = f(x)$. După cum vedem, am obținut pe o cale diferită (această cale putea fi folosită și pentru integrala Riemann) același rezultat

ca și în cazul în care $f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Și aici, integrala este o „primitivă aproape peste tot" a funcției care se integrează. Dar există alte aspecte sub care, și aici, integrala Lebesgue își manifestă superioritatea față de integrala Riemann. Mai întîi, trebuie să observăm că mulțimile de măsură nulă sînt „de efect nul" în procesul de integrare Lebesgue, în sensul că schimbarea comportării unei funcții pe o mulțime de măsură nulă nu influențează nici măsurabilitatea funcției, nici integrabilitatea ei și nici valoarea integralei Lebesgue a funcției. În particular, este permis ca funcția să nici nu fie măcar definită (sau să fie definită în mod arbitrar) în unele puncte ale teritoriului de integrare, cu condiția ca aceste puncte să formeze o mulțime de măsură nulă. Acest fapt este deosebit de important, deoarece, pentru unele funcții des întîlnite în analiză, este asigurată existența derivatei aproape peste tot, dar nu peste tot. Așa se întîmplă în clasa funcțiilor cu variație mărginită, care conține subclase importante, cum ar fi: clasa funcțiilor monotone, clasa funcțiilor lipschitziene, clasa funcțiilor absolut continue, clasa funcțiilor singulare. (O funcție $f$ este lipschitziană pe $[a, b]$, dacă există o constantă $\lambda$ pentru care $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$, oricare ar fi $x, y \in [a, b]$. O funcție $\varphi$ este singulară pe $[a, b]$, dacă este cu variație mărginită, iar derivata se anulează aproape peste tot, fără a fi identic nulă. Funcțiile absolut continue au fost definite în capitolul III). O teoremă clasică a lui Lebesgue afirmă că orice funcție $f$, cu variație mărginită pe $[a, b]$, este derivabilă aproape peste tot pe $[a, b]$. Este lipsit de sens să punem problema integrabilității Riemann a derivatei $f'$ pe $[a, b]$, deoarece integrabilitatea Riemann pe $[a, b]$ cere ca funcția considerată să fie definită peste tot pe $[a, b]$. Este adevărat că am putea completa pe $f'$ în punctele în care ea nu există, atribuindu-i valori arbitrare, de exemplu, considerînd funcția $g$ egală cu $f'$ acolo unde $f'$ este definită și egală cu zero în rest. Dar nimic nu ne asigură că printr-o altă completare a funcției $f'$, de exemplu, definind funcția $h$ egală cu $f'$ acolo unde $f'$ există, și egală cu 1 în rest, funcțiile $g$ și $h$ împărtășesc aceeași soartă din punctul de vedere al inte-

grabilităţii Riemann; se poate întîmpla ca una dintre aceste funcţii să fie integrabilă Riemann pe $[a, b]$, iar cealaltă nu. În schimb funcţiile $g$ şi $h$ (şi orice alte funcţii obţinute prin prelungirea lui $f'$) împărtăşesc aceeaşi soartă din punctul de vedere al integrabilităţii Lebesgue; ele sînt toate sumabile, atîta vreme cît $f$ — aşa cum am presupus — este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Deci oricare ar fi funcţia $f$ cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, are sens şi este finită integrala Lebesgue a derivatei $f'$ pe $[a, b]$, deşi este posibil ca $f'$ să nu fie definită în toate punctele din $[a, b]$.

Să mai observăm faptul că în timp ce integrala Riemann se defineşte numai pe un interval, integrala Lebesgue se poate defini pe orice mulţime măsurabilă $A$, iar funcţia $F(E)$ (unde $E$ este măsurabilă şi conţinută în $A$), dată de valoarea integralei Lebesgue pe mulţimea $E$, este o funcţie de mulţime derivabilă aproape peste tot pe $A$, derivata $F'$ (definită ca fiind egală cu lim $F(E)/m(E)$ cînd diam $E \rightarrow 0$) fiind egală aproape peste tot chiar cu funcţia care se integrează.

Proprietatea funcţiilor integrabile Lebesgue de a admite o „primitivă aproape peste tot“ se menţine şi la unele clase de funcţii măsurabile care nu sînt integrabile Lebesgue. Astfel, Luzin a demonstrat că fiind dată o funcţie reală $f$, măsurabilă Lebesgue, definită (eventual numai aproape peste tot) pe un interval $(a, b)$ al dreptei numerice, există o funcţie $F$ continuă pe $(a, b)$, derivabilă aproape peste tot pe $(a, b)$ şi astfel încît $F'(x) = f(x)$ aproape peste tot pe $(a, b)$. Cu alte cuvinte, teorema care afirmă că o funcţie continuă admite primitivă îşi are corespondentul ei la funcţii măsurabile, cu condiţia de a se înlocui primitiva obişnuită prin „primitiva aproape peste tot“. Situaţia aceasta apare oarecum firească, dacă ne amintim că o funcţie reală, măsurabilă, de o variabilă reală, este aproximativ continuă aproape peste tot. Punctele de derivabilitate ale funcţiei $F$ evocă punctele de continuitate aproximativă ale funcţiei $f$ şi invers; dar fenomenul are un caracter statistic, neputîndu-se pune semnul egalităţii între mulţimea punctelor de derivabilitate ale lui $F$ şi mulţimea punctelor de continuitate aproximativă ale lui $f$. Acest caracter statistic îl prezintă şi legătura din-

tre o funcţie $f$ integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi integrala Riemann $F(x)$ a lui $f$ de la $a$ la $x$. Se ştie, într-adevăr, că $F$ este derivabilă în orice punct de continuitate al lui $f$, dar nu se poate afirma că $f$ este continuă în orice punct de derivabilitate al lui $F$.

Am văzut, într-un paragraf anterior al acestui capitol, că ceea ce a transformat integrala într-un instrument de calcul deosebit de perfecţionat şi eficace a fost descoperirea — de către Leibniz şi Newton — a posibilităţii de a reduce calculul integralelor la calculul primitivelor. Această posibilitate, concretizată în celebra formulă a lui Leibniz şi Newton, presupune însă atît existenţa integralei, cît şi existenţa primitivei funcţiei considerate. Condiţiile acestea sînt nu numai necesare, dar şi suficiente pentru validitatea formulei lui Leibniz şi Newton, atîta vreme cît integrala este concepută în sensul lui Riemann, iar primitiva este considerată în sensul obişnuit. Într-adevăr, am văzut că dacă $f$ este o funcţie derivabilă, cu derivata integrabilă Riemann pe $[a, b]$, atunci integrala lui $f'$ de la $a$ la $b$ este tocmai diferenţa $f(b) - f(a)$. Se pune în mod natural întrebarea dacă formula lui Leibniz-Newton îşi menţine validitatea atunci cînd primitiva în sensul obişnuit este înlocuită cu „primitiva aproape peste tot". Această problemă se pune atît pentru integrala Riemann, cît şi pentru integrala Lebesgue. Mai întîi însă trebuie să observăm că în timp ce primitiva obişnuită este unic determinată — în afara unei constante aditive —, iar diferenţa $f(b) - f(a)$ nu depinde de valoarea acestei constante, deci nici de alegerea primitivei, cu totul altfel se prezintă situaţia în ceea ce priveşte „primitiva aproape peste tot". Fără să intrăm în detalii, vom semnala faptul că există funcţii continue, monoton crescătoare şi neconstante pe $[a, b]$, a căror derivată este egală cu zero aproape peste tot pe $[a, b]$ (amintim că existenţa aproape peste tot a derivatei este asigurată pentru orice funcţie cu variaţie mărginită, deci, în particular, şi pentru funcţiile monotone). O astfel de funcţie se numeşte o funcţie de tip Cantor. De aici rezultă imediat că dacă $F$ este o „primitivă aproape peste tot" a funcţiei $f$ pe $[a, b]$, iar $G$ este o funcţie de tip Cantor pe $[a, b]$, atunci $F + G$

este de asemenea o „primitivă aproape peste tot“ a lui $f$ pe $[a, b]$. Mai mult decît atît, există o infinitate de funcţii de tip Cantor pe $[a, b]$. Deci diferenţa $F(b) - F(a)$ nu este independentă de alegerea primitivei aproape peste tot şi formula lui Leibniz-Newton îşi pierde valabilitatea. Astfel, dacă $f$ este funcţia identic nulă pe $[a, b]$, iar $F$ este o funcţie de tip Cantor pe $[a, b]$, $F$ va fi o „primitivă aproape peste tot“ a lui $f$ pe $[a, b]$, dar în timp ce integrala (Riemann sau Lebesgue) a lui $f$ pe $[a, b]$ este evident egală cu zero, diferenţa $F(b)-F(a)$ este strict pozitivă (deoarece $F$ nu este constantă, fiind totuşi monoton crescătoare pe $[a, b]$). Aşadar *nu* avem egalitate între diferenţa $F(b) - F(a)$ şi valoarea integralei Lebesgue a funcţiei $f$ pe $[a, b]$. Observăm aici o nouă deosebire între integrala Riemann şi integrala Lebesgue, dar de data aceasta, deosebirea este în favoarea celei dintîi. În timp ce formula Leibniz-Newton este adevărată pentru orice derivată integrabilă Riemann, această formulă îşi pierde valabilitatea atunci cînd este vorba de o derivată integrabilă Lebesgue.

Totuşi, deficienţa semnalată mai sus nu este gravă, deoarece în clasa „primitivelor aproape peste tot“ ale unei funcţii sumabile există o subclasă în raport cu care formula lui Leibniz-Newton îşi recapătă valabilitatea; este subclasa acelor „primitive aproape peste tot“ care sînt absolut continue. O teoremă importantă ne asigură că dacă două funcţii absolut continue au aproape peste tot aceeaşi derivată, atunci ele diferă printr-o constantă. Deci, dacă $f$ este sumabilă pe $[a, b]$, iar $F$ şi $G$ sînt două „primitive aproape peste tot“ absolut continue ale funcţiei $f$, atunci $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$. În plus, se arată că diferenţa $F(b)- - F(a)$ este egală tocmai cu valoarea integralei Lebesgue a funcţiei $f$ pe $[a, b]$. De exemplu, dacă $f$ este o funcţie egală cu zero aproape peste tot pe $[a, b]$, subclasa „primitivelor aproape peste tot“ absolut continue ale lui $f$ este formată din toate funcţiile constante pe $[a, b]$ şi avem (notînd cu $F$ o funcţie constantă pe $[a, b]$), $F(b) - F(a) =$ $=$ integrala lui $f$ pe $[a, b] = 0$.

Ţinînd seamă de rolul important al mulţimilor de măsură nulă în teoria integralei Lebesgue, este natural să

ne întrebăm dacă nu cumva orice funcţie integrabilă Lebesgue devine integrabilă Riemann prin modificarea convenabilă a valorilor ei pe o mulţime de măsură nulă. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, considerînd pe intervalul $[a, b]$ o mulţime $P$ perfectă, rară şi de măsură pozitivă, funcţia egală cu 1 în punctele din $P$ şi cu 0 în rest este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$, dar nu coincide aproape peste tot cu nici o funcţie integrabilă Riemann, deoarece mulţimea punctelor de discontinuitate coincide cu $P$ şi, deci, este de măsură pozitivă.

Să observăm, în încheierea acestui paragraf, că un aspect important al superiorităţii integralei Lebesgue în raport cu integrala Riemann a fost prezentat în capitolul III, paragrafele 11 şi 12.

## REPARAŢII DUPĂ O INJUSTIŢIE

Cititorului atent al paragrafelor precedente nu i-a scăpat probabil faptul că în timp ce teoria integralei Lebesgue avea la bază o teorie corespunzătoare a măsurii mulţimilor şi funcţiilor, teorie pe care o valorificam înlocuind diviziunile orizontale (adică ale intervalului de definiţie) prin diviziuni verticale (adică ale intervalului valorilor), teoria integralei Riemann era lipsită de aceste două avantaje. Totuşi, măsura Lebesgue a mulţimilor putea fi angajată şi fără a recurge la partiţii verticale; era suficient ca fiind dată o mulţime $A$ măsurabilă Lebesgue, să considerăm o partiţie a ei în mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ măsurabile Lebesgue şi să formăm, relativ la o astfel de partiţie. sumele de tip Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m(A_i),$$

unde $f$ este o funcţie reală definită pe $A$, iar $\xi_i$ aparţine lui $A_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Mai departe, am fi putut defini integrabilitatea şi integrala, studiind comportarea sumelor de mai sus, exact după metoda lui Riemann. După cum se observă, această cale reţine, dintre cele două mari idei ale lui Lebesgue (înlocuirea diviziunilor

orizontale prin diviziuni verticale şi adoptarea, pe cale explicită, a unei teorii a măsurii mulţimilor), numai una dintre ele. Consecinţele adoptării acestei căi au fost studiate şi s-a constatat că cel puţin pentru anumite clase particulare de funcţii, cum ar fi funcţiile reale de o variabilă reală, conceptul de integrabilitate care se obţine este exact cel al lui Lebesgue, iar integrala obţinută este chiar integrala lui Lebesgue. O teorie de acest fel este numită, de obicei, „o teorie de tip Riemann a integralei Lebesgue". Această teorie arată că operaţia de înlocuire a diviziunilor orizontale prin cele verticale nu este necesară pentru a se obţine progresul scontat de Lebesgue, cel puţin în cazul în care avem în vedere numai funcţii reale de o variabilă reală. Se poate însă arăta că această operaţie de înlocuire nu este nici suficientă pentru a se obţine progresul realizat de integrala Lebesgue. Într-adevăr, s-a putut construi o „teorie de tip Lebesgue a integralei Riemann", arătîndu-se că simpla înlocuire a partiţiilor orizontale prin cele verticale — fără adoptarea măsurii introduse de Lebesgue, ci a unei măsuri mai rudimentare — duce tot la un concept de integrabilitate echivalent cu cel al lui Riemann. La obţinerea acestui rezultat, o contribuţie însemnată a fost adusă de către matematicianul român acad. prof. Miron Nicolescu, mai întîi într-un articol publicat în urmă cu peste treizeci de ani (*Sur les fonctions mesurables* (*J*) în „Bulletin des sciences mathématiques", vol. 57, 1933, pp. 276—281), apoi în volumul al treilea al tratatului domniei sale de analiză matematică.

Vom schiţa, în cele ce urmează, acest punct de vedere şi rezultatele mai importante la care el conduce.

Încă de la sfîrşitul secolului trecut, integrala Riemann a fost legată de o anumită concepţie despre ideea de măsură, concepţie datorită lui Jordan. Pentru o mulţime $E$ liniară de puncte, se ajunge la noţiunea de măsurabilitate Jordan în felul următor. Fiecărui sistem finit de intervale disjuncte, conţinute în $E$, i se asociază suma lungimilor intervalelor sale, iar marginea superioară a sumelor astfel obţinute constituie, prin definiţie, lungimea interioară a mulţimii $E$ şi se notează $l_i(E)$. Fiecărui sis-

tem finit de intervale disjuncte, care acoperă mulţimea $E$, i se asociază suma lungimilor intervalelor sistemului, iar marginea inferioară a sumelor astfel obţinute constituie, prin definiţie, lungimea exterioară a mulţimii $E$ şi se notează $l_e(E)$. Chiar din definiţiile introduse rezultă că lungimea interioară a unei mulţimi nu poate întrece lungimea ei exterioară; dacă avem $l_i(E) = l_e(E)$, spunem că mulţimea $E$ are lungime (sau este măsurabilă Jordan), iar valoarea comună a lungimilor interioară şi exterioară se numeşte lungimea mulţimii $E$ şi se notează $l(E)$.

Pentru mulţimi în plan se procedează într-un mod analog. Se defineşte aria interioară $a_i(E)$ a unei mulţimi $E$ ca fiind marginea superioară a ariilor domeniilor poligonale conţinute în $E$. Se defineşte apoi aria exterioară $a_e(E)$ a mulţimii $E$ ca fiind marginea inferioară a ariilor domeniilor poligonale care conţin mulţimea $E$. Avem totdeauna $a_i(E) \leqslant a_e(E)$. Dacă avem chiar egalitate între cele două arii, spunem că $E$ are arie (sau este măsurabilă Jordan), iar valoarea comună a ariilor interioară şi exterioară se numeşte măsura Jordan sau aria mulţimii $E$ şi se notează prin $a(E)$.

Dintre proprietăţile măsurii şi măsurabilităţii Jordan, amintim aici doar cîteva:

Măsura Jordan este o funcţie nenegativă şi monotonă de mulţime măsurabilă Jordan (dacă $A$ şi $B$ sînt măsurabile Jordan, $A \subset B$, atunci măsura Jordan a lui $A$ nu o întrece pe aceea a lui $B$).

O mulţime este măsurabilă Jordan, dacă şi numai dacă frontiera ei este de măsură Jordan egală cu zero.

Complementara unei mulţimi măsurabile Jordan este de asemenea măsurabilă Jordan.

Orice reuniune finită şi orice intersecţie finită de mulţimi măsurabile Jordan sînt de asemenea mulţimi măsurabile Jordan. Dacă, în plus, mulţimile sînt disjuncte două cîte două, atunci măsura Jordan a reuniunii este egală cu suma măsurilor Jordan ale termenilor. Cu alte cuvinte, măsura Jordan este o funcţie finit-aditivă de mulţime măsurabilă Jordan. Aditivitatea numărabilă are şi ea loc cu condiţia (nu totdeauna îndeplinită!) ca reuniunea

mulţimilor considerate să fie o mulţime măsurabilă Jordan.

Nu este greu de văzut că măsurabilitatea Jordan a unei mulţimi $E$ implică măsurabilitatea ei Lebesgue şi egalitatea dintre $m(E)$ şi măsura Jordan a lui $E$.

Pe dreaptă, mulţimea lui Cantor are lungimea egală cu zero, dar mulţimea punctelor raţionale din (0, 1) nu are lungime, deoarece lungimea ei interioară este nulă, iar cea exterioară este egală cu 1. Acest exemplu arată că conceptul de măsurabilitate introdus de Lebesgue este efectiv mai general decît cel introdus de Jordan. În orice caz, orice interval are lungime (în sensul lui Jordan), deci sîntem în progres faţă de concepţia elementară asupra lungimii.

Fenomene mai interesante au loc în plan. De exemplu, se poate arăta că orice mulţime convexă din plan are arie. Pe dreaptă, teorema aceasta este adevărată în mod banal, deoarece singurele mulţimi convexe sînt aici intervalele. Tot în plan are loc o teoremă care dezvăluie legătura profundă dintre integrabilitatea Riemann şi măsurabilitatea Jordan. Fiind dată o funcţie reală $f$, definită şi pozitivă pe intervalul $[a, b]$, să notăm cu $D_f$ mulţimea punctelor ale căror coordonate $x$, $y$ satisfac inegalităţile $a \leqslant x \leqslant b$ şi $0 \leqslant y \leqslant f(x)$. O teoremă clasică, datînd încă de la sfîrşitul secolului trecut, afirmă că integrabilitatea Riemann a funcţiei $f$ pe intervalul $[a, b]$ este echivalentă cu măsurabilitatea Jordan a mulţimii $D_f$. Dacă $f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$, integrala Riemann a lui $f$ pe $[a, b]$ este egală cu aria mulţimii $D_f$.

Acest rezultat — ca şi altele, pe care nu le mai semnalăm aici — a pus problema dacă nu cumva teoria integralei Riemann n-ar putea fi clădită pe teoria măsurii Jordan, după modelul folosit de Lebesgue în definirea şi studierea integralei sale cu ajutorul măsurii Lebesgue. O dată adoptată această idee a lui Lebesgue, era inevitabil să se adopte şi cealaltă idee a sa, relativă la înlocuirea diviziunilor orizontale prin diviziuni verticale. În felul acesta, s-a ajuns la o teorie de tip Lebesgue pentru integrala Riemann, teorie a cărei dezvoltare începe în jurul anului 1930. Această teorie trece, ca şi teoria corespunzătoare a lui Lebesgue,

prin noţiunea de „funcţie măsurabilă Jordan“, noţiune care s-a cristalizat cu dificultate, după multe dibuiri. Am putea spune chiar că principalul efort, în construirea acestei teorii, a fost îndreptat către degajarea acelei clase de funcţii care să îndeplinească aici rolul pe care funcţiile măsurabile Lebesgue îl au în teoria integralei Lebesgue. Un memoriu nefericit din 1929 al matematicianului olandez J. Ridder (de altfel, autor a numeroase contribuţii în teoria integralei), care crezuse că noţiunea de funcţie măsurabilă Jordan se poate obţine din noţiunea de funcţie măsurabilă Lebesgue prin simpla înlocuire a măsurabilităţii Lebesgue a mulţimilor prin măsurabilitatea lor Jordan, a dat un stimulent deosebit cercetărilor în această direcţie, confirmîndu-se din nou cît de fecundă poate fi uneori o greşeală.

Cărei exigenţe trebuia să-i răspundă definiţia măsurabilităţii Jordan a unei funcţii? Această definiţie trebuia să fie de aşa natură, încît orice funcţie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ să fie măsurabilă Jordan pe $[a, b]$ (întocmai după cum orice funcţie integrabilă Lebesgue este măsurabilă Lebesgue) şi orice funcţie mărginită şi măsurabilă Jordan pe $[a, b]$ să fie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ (întocmai după cum orice funcţie mărginită şi măsurabilă Lebesgue pe $[a, b]$ este integrabilă Lebesgue pe $[a, b]$). Deoarece măsurabilitatea Lebesgue a unei funcţii $f$ revine la măsurabilitatea Lebesgue a mulţimilor $\{x; f(x) > \alpha\}$ pentru orice număr real $\alpha$, Ridder definise (în memoriul amintit) măsurabilitatea Jordan a funcţiei $f$ prin măsurabilitatea Jordan a aceloraşi mulţimi. Nu mică a fost mirarea cîţiva ani mai tîrziu (prin 1933) cînd, prin exemple date concomitent de către mai mulţi matematicieni (unul dintre exemple fiind datorat marelui matematician român S. Stoilow), s-a constatat că, adoptîndu-se definiţia propusă de Ridder, nici măcar funcţiile continue nu sînt, toate, măsurabile Jordan. Într-adevăr, fie $E$ o mulţime de tip Cantor, dar de măsură Lebesgue pozitivă, construită pe $[0, 1]$. Dacă $f$ este funcţia egală, în fiecare punct $x$ din $[0, 1]$, cu distanţa de la $x$ la mulţimea $E$, atunci $f$ este continuă şi nenegativă pe $[0, 1]$, fiind egală cu zero exact în punctele mulţimii $E$. Dar avem $l_i(E) = 0$ şi $l_e(E) > 0$, deci mulţimea $E$ nu este măsu-

rabilă Jordan. Rezultă că mulţimea $\{x: f(x) > 0\}$ (complementara lui $E$) nu este măsurabilă Jordan, deci funcţia $f$, deşi continuă, nu este măsurabilă Jordan în sensul propus de Ridder.

O versiune adecvată a noţiunii de funcţie măsurabilă Jordan a fost obţinută prin eforturile conjugate ale mai multor matematicieni (printre care şi Ridder). Iată în ce constă această versiune: o funcţie este, prin definiţie, măsurabilă Jordan pe $[a, b]$, dacă mulţimea $\{x; f(x) > \alpha\}$ este măsurabilă Jordan pentru orice număr real $\alpha$, cu excepţia eventuală a unei mulţimi cel mult numărabile de valori ale lui $\alpha$. Se demonstrează că o funcţie reală $f$, de una sau mai multe variabile reale, este măsurabilă Jordan pe un interval $I$, dacă şi numai dacă $f$ este continuă aproape peste tot pe $I$. De aici rezultă imediat că o funcţie mărginită şi măsurabilă Jordan pe un interval compact este integrabilă Riemann pe acest interval şi reciproc.

Cu ajutorul noţiunii de funcţie măsurabilă Jordan putem construi o teorie corespunzătoare a integralei. Fiind dată o funcţie $f$, definită, măsurabilă Jordan şi mărginită pe o mulţime $E$ măsurabilă Jordan, vom considera un interval $[A, B]$ care conţine strict intervalul marginilor lui $f$ $(A < m \leqslant M < B)$. Vom considera numai acele diviziuni $\Delta$ ale lui $[A, B]$ care sînt formate din puncte neaparţinînd mulţimii numărabile excepţionale din definiţia măsurabilităţii Jordan a lui $f$. Fiecărei diviziuni $A = y_0 < \ldots < y_i < y_{i+1} < \ldots < y_n = B)$ îi vom asocia sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\, l(E_i), \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} l(E_i),$$

unde $E_i = \{x; y_i \leqslant f(x) < y_{i+1}\}$. De aici, mai departe, procedăm exact ca şi în definiţia integralei Lebesgue şi obţinem conceptul de integrabilitate Riemann şi cel de integrală Riemann pe mulţimea măsurabilă Jordan $E$. Se demonstrează că orice funcţie $f$, mărginită şi măsurabilă Jordan pe $E$, este integrabilă Riemann. Tot odată, se arată că o funcţie reală $f$ este măsurabilă Jordan pe mulţimea $E$ măsurabilă Jordan, dacă şi numai dacă $f$ este continuă aproape peste tot pe $E$ (relativ la mulţimea $E$).

Aceste rezultate arată că singurul progres obţinut (faţă de integrala Riemann clasică) prin adoptarea măsurii Jordan şi a diviziunilor verticale este posibilitatea de a defini integrala Riemann pe mulţimi ceva mai generale decît intervalele, anume pe mulţimi măsurabile Jordan. În schimb, în ceea ce priveşte natura funcţiilor care se integrează, nu am progresat, rămînînd tot în cadrul funcţiilor mărginite şi continue aproape peste tot.

Apare astfel clar că superioritatea integralei Lebesgue faţă de integrala Riemann nu provine — în esenţă — nici din adoptarea diviziunilor verticale, nici din adoptarea unei teorii a măsurii, ci din faptul că măsura adoptată de către Lebesgue este mai bună decît măsura Jordan. Prin ce este ea mai bună? O comparare atentă a celor două măsuri conduce imediat la concluzia că superioritatea măsurii Lebesgue faţă de măsura Jordan constă în faptul că în timp ce o reuniune numărabilă de mulţimi măsurabile Lebesgue este totdeauna măsurabilă Lebesgue, o reuniune numărabilă de mulţimi măsurabile Jordan nu este totdeauna o mulţime măsurabilă Jordan.

De altfel, teoria integralei Riemann pe mulţimi măsurabile Jordan poate fi construită şi fără a se recurge la diviziuni verticale. Se pot folosi partiţii finite ale mulţimii de definiţie în mulţimi măsurabile Jordan şi sumele corespunzătoare de tip Riemann.

Dacă însă mergem mai departe şi definim, după metoda lui Lebesgue, integrabilitatea şi integrala Riemann pentru funcţii nemărginite, constatăm că nu mai regăsim integrala Riemann în sens generalizat. În timp ce aceasta din urmă admitea fenomenul de semiconvergenţă, noua integrală Riemann a unei funcţii nemărginite nu mai admite acest fenomen. Este aici un nou avantaj pe care-l oferă o teorie de tip Lebesgue pentru integrala Riemann: dispare acea neconcordanţa supărătoare dintre integrala Riemann în sens generalizat pentru funcţii de o variabilă şi aceeaşi integrală pentru funcţii de mai multe variabile reale.

Trebuie sa mai observăm ca metoda lui Lebesgue a diviziunilor verticale aduce, chiar pentru integrala Riemann, un spor de eleganţă şi simplitate în desfăşurarea

demonstrațiilor, ceea ce o recomandă și din punct de vedere didactic.

Să încercăm, în sfîrșit, să înțelegem de unde provin acele fenomene de continuitate pe care le detectăm atît în structura funcțiilor integrabile Riemann, cît și în aceea a funcțiilor integrabile Lebesgue. În definiția „orizontală" a integralei, pe fiecare mulțime $A_i$ a partiției mulțimii de definiție în mulțimi măsurabile, funcția este reprezentată prin valoarea ei într-un punct $\xi_i$ din $A_i$. Dar această reprezentare devine cu atît mai fidelă, cu cît sînt mai apropiate valorile lui $f$ pe $A_i$ de valoarea $f(\xi_i)$. Trebuie deci să ne așteptăm ca punctele care se sustrag acestui deziderat să nu poată ocupa un teritoriu prea mare. În definiția integralei Riemann mulțimile $A_i$ sînt măsurabile Jordan, iar continuitatea pe $A_i$, prin $A_i$, revine aproape peste tot pe $A_i$ la continuitatea obișnuită, deoarece o mulțime măsurabilă Jordan diferă de interiorul ei doar printr-o mulțime de măsură nulă. Așa se ajunge la continuitatea aproape peste tot a funcțiilor integrabile Riemann. În ceea ce privește integrala Lebesgue, aici mulțimile $A_i$ sînt măsurabile Lebesgue. Se știe că aproape orice punct al unei mulțimi $A$ măsurabile Lebesgue este un punct de densitate pentru $A$ (a se vedea, pentru această noțiune, paragraful 5 din capitolul I). De aici rezultă că proprietatea de continuitate a unei funcții pe $A$, prin mulțimea $A$, revine la proprietatea de continuitate aproximativă aproape peste tot pe $A$ (pentru proprietatea de continuitate aproximativă, a se vedea de asemenea paragraful 5 din capitolul I). Așa se ajunge la continuitatea aproximativă aproape peste tot a oricărei funcții integrabile Lebesgue.

## INFIRMITĂȚI ALE INTEGRALEI LEBESGUE

Acum, după ce am adus atîtea laude integralei Lebesgue, să vedem totuși dacă ea rezolvă toate problemele în fața cărora integrala Riemann se dovedea insuficientă. Răspunsul, după cum se va vedea în acest paragraf, este negativ. Mai întîi, să ne amintim că suma unei serii trigo-

nometrice convergente pe $[a, b]$ nu este totdeauna integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Unele dintre sumele de serii trigonometrice neintegrabile Riemann pe $[a, b]$ sînt integrabile Lebesgue pe $[a, b]$; din păcate însă, există serii trigonometrice convergente pe $[a, b]$, ale căror sume nu sînt integrabile Lebesgue pe $[a, b]$. De aici rezultă că nu orice serie trigonometrică convergentă este o serie Fourier-Lebesgue. Această situaţie a făcut necesară introducerea unei noi integrale, despre care vom discuta în paragraful următor.

O altă problemă importantă în care integrala Lebesgue şi-a manifestat eficacitatea este aceea a exprimării primitivei unei funcţii $f$ (în cazul în care primitiva există) cu ajutorul integralei lui $f$. Integrala Riemann ne permitea să scriem relaţia

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \qquad (13)$$

ori de cîte ori derivata $f'$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Integrala Lebesgue permite să se extindă valabilitatea relaţiei (13) la toate funcţiile $f$ cu derivată mărginită pe $[a, b]$. Mai mult decît atît, se poate arăta că relaţia (13) se menţine pentru orice funcţie $f$ a cărei derivată există, finită, în fiecare punct din $[a, b]$ şi este sumabilă pe $[a, b]$ (integrala fiind deci considerată în sensul lui Lebesgue). Astfel, relaţia (13) este adevărată, pe intervalul $[0, 1]$, pentru funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

a cărei derivată

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^{1/2} \sin \frac{1}{x} - x^{-1/2} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este finită şi sumabilă pe $[0, 1]$, deoarece are loc inegalitatea

$$| f'(x) | \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}},$$

unde funcţia din membrul al doilea este sumabilă pe [0, 1] dar $f'(x)$ nu este mărginită pe [0, 1]).

Totuşi, există derivate finite pe [0, 1] care nu sînt sumabile Lebesgue pe [0, 1], Fie, de exemplu, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Funcţia aceasta este derivabilă în fiecare punct din [0, 1], dar derivata $f'(x)$, deşi finită pe [0, 1], nu este sumabilă pe [0, 1]. Într-adevăr, dacă $0 < \alpha < \beta \leqslant 1$, atunci derivata $f'$ este mărginită pe $[\alpha, \beta]$ şi

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\mathrm{d}x = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

În particular, pentru

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}, \quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

vom avea

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}.$$

Însă intervalele compacte $[\alpha_n, \beta_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt mutual disjuncte; aceasta înseamnă că punînd

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n],$$

vom avea

$$\int_E |f'(x)| \mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty,$$

şi deci $f'$ nu este sumabilă pe [0, 1]. Aşadar, introducerea integralei Lebesgue nu rezolvă complet problema exprimării primitivei (în cazul în care ea există) unei funcţii $f$ cu ajutorul integralei lui $f$; cu alte cuvinte, folosind integrala Lebesgue, relaţia (13) nu va avea loc pentru orice funcţie $f$ cu derivată finită pe $[a, b]$, deoarece membrul al

doilea din (13) nu are sens pentru orice derivată finită $f'(x)$. Problema introducerii unui concept mai general de integrală, în raport cu care relația (13) să fie valabilă pentru orice funcție $f$ cu derivata finită pe $[a, b]$, a fost rezolvată în deceniul al doilea al secolului nostru; soluția ei va fi expusă în unul din paragrafele următoare.

## LA ESENȚA IDEII DE MĂSURĂ

Se poate pune întrebarea dacă nu cumva existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue nu influențează negativ teoria integralei Lebesgue, restrîngîndu-i cadrul. Într-adevăr, tocmai existența unor astfel de mulțimi face posibilă existența funcțiilor nemăsurabile Lebesgue și a mulțimilor pe care nu se poate defini integrala Lebesgue. Dacă nu ar exista mulțimi nemăsurabile Lebesgue, atunci orice funcție mărginită ar fi integrabilă Lebesgue pe orice mulțime mărginită.

Pentru a răspunde la această întrebare, trebuie să controlăm dacă existența mulțimilor nemăsurabile provine dintr-un defect, dintr-o particularitate a măsurii Lebesgue sau este ea inerentă ideii de măsură, așa cum ne este impusă de experiență. Ajungem astfel la necesitatea de a formula anumite deziderate pe care o funcție de mulțime trebuie să le satisfacă pentru ca ea să poată fi numită o măsură. Clasa $\mathcal{A}$ a mulțimilor pentru care vrem ca măsura să fie definită trebuie să constituie ceea ce se numește uneori un corp de mulțimi, adică să fie închisă față de operațiile de diferență și de reuniune numărabilă. În ceea ce privește măsura (pe care o notăm cu $\mu$), ei i se cere să nu ia valori negative, să fie numărabil aditivă (adică măsura unei reuniuni numărabile de mulțimi disjuncte din $\mathcal{A}$ să fie egală cu suma seriei avînd ca termeni măsurile acestor mulțimi) și să fie finită pentru cel puțin o mulțime din $\mathcal{A}$. Dacă aceste condiții sînt îndeplinite, atunci se arată ușor că măsura mulțimii vide este egală cu zero (alegem o mulțime $A$ de măsură finită; din $0 = A - A$ rezultă $\mu(0) = \mu(A) - \mu(A) = 0$) și că măsura este o funcție monotonă pe $\mathcal{A}$ (adică pentru două mulțimi $A$

și $B$ din $\mathcal{A}$, $A$ conținută în $B$, măsura lui $A$ nu depășește măsura lui $B$; într-adevăr, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$, și, termenii fiind toți nenegativi, rezultă $\mu(A) \leqslant \mu(B)$).

Condițiile formulate mai sus constituie deziderate minimale pe care trebuie să le satisfacă o funcție de mulțime pentru ca ea să poată fi considerată o măsură, deci pentru ca ea să rețină ceea ce este esențial în ideea de măsură, așa cum se desprinde ea din nenumăratele situații particulare întîlnite în matematică, în celelalte științe și chiar în practica cotidiană. Pornindu-se de la această definiție sau de la definiții apropiate, s-a putut construi o teorie axiomatică a măsurii, ale cărei variante sînt expuse în unele cărți de specialitate (dintre care, în limba română: volumul III al tratatului de *Analiză matematică* al acad. Miron Nicolescu și manualul de *Teoria măsurii și funcții reale* al prof. N. Dinculeanu). O astfel de teorie se va referi nu numai la măsuri pe corpuri de mulțimi ale dreptei numerice sau ale spațiului euclidian cu $n$ dimensiuni, ci la corpuri de părți ale unei mulțimi abstracte. Un exemplu va fi edificator pentru generalitatea conceptului de măsură pe care tocmai l-am introdus: fie $A$ o mulțime nevidă arbitrară. Familia tuturor părților lui $A$ constituie, evident, un corp, fie el $\mathcal{A}$. Putem defini pe $\mathcal{A}$ o măsură în felul următor: alegem un element $a$ din $A$ și punem $\mu(E) = 1$, dacă $E$ conține pe $a$ și $\mu(E) = 0$ în cazul contrar. Se verifică ușor că toate proprietățile măsurii sînt satisfăcute. În particular, luînd în rolul mulțimii $A$ chiar dreapta numerică, rezultă că se poate defini o măsură care să aibă sens pentru toate părțile dreptei numerice, deci în raport cu care să nu mai existe mulțimi nemăsurabile de puncte ale dreptei. S-ar părea deci că existența pe dreaptă a mulțimilor nemăsurabile Lebesgue se adaugă la lista infirmităților integralei Lebesgue.

Totuși, la o cercetare mai atentă, infirmitatea pe care tocmai am detectat-o se dovedește a fi doar aparentă. Într-adevăr, în definiția axiomatică a măsurii s-au neglijat unele deziderate intuitive care, în teoria integralei funcțiilor reale de o variabilă reală, s-au dovedit a fi foarte importante. Într-o teorie abstractă, axiomatică, se pornește de la un număr minim de restricții impuse obiectelor

cercetate și, treptat, cadrul se restrînge, se specializează prin formularea unor restricții suplimentare. În felul acesta se poate studia efectul fiecărei restricții cu care se lucrează, se poate stabili natura ei logică, poziția pe care ea o ocupă în ierarhia generală. Făcîndu-se, treptat, concesii în ceea ce privește generalitatea, putem în schimb să îmbogățim structura formațiunilor cercetate.

Aceste principii generale sînt folosite și în teoria măsurii. De la un corp abstract de mulțimi trecem la corpuri din ce în ce mai particulare, pentru a vedea ce specific capătă teoria măsurii în condițiile unor restricții mai numeroase. Printre aceste corpuri, un loc de seamă îl ocupă corpurile de părți ale spațiului euclidian $n$-dimensional. Aici, două restricții noi prezintă un deosebit interes. Prima constă în dezideratul — natural — ca printre mulțimile corpului considerat să se găsească toate intervalele, iar măsura acestor intervale să coincidă cu măsura lor în sens elementar (adică produsul dimensiunilor lor). De altfel, la această cerință am fost obligați să ne referim de mai multe ori în cursul acestui capitol. A doua restricție constă în cererea ca două mulțimi care se obțin una din alta printr-o deplasare destul de elementară să fie în același timp măsurabile sau nemăsurabile, iar în cazul în care sînt măsurabile, să aibă aceeași măsură. Ne-am întîlnit cu o proprietate de acest tip atunci cînd am demonstrat existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue. Am observat atunci faptul (care a intervenit efectiv în demonstrație) că măsurabilitatea și măsura Lebesgue, pentru mulțimi ale dreptei numerice, sînt invariante față de o translație.

Întorcîndu-ne acum la exemplul dat mai sus, de măsură definită pentru toate părțile dreptei numerice, observăm că această măsură nu este invariantă față de translații. Într-adevăr, punînd $\mu(E) = 1$, dacă $E$ conține originea, și $\mu(E) = 0$, dacă $E$ nu conține originea, măsura intervalului $[-1, +1]$ este egală cu 1, dar măsura intervalului $[1, 3]$, care se obține din primul printr-o translație de mărime 2, nu este egală cu 1, ci cu 0. Pe de altă parte, măsura unui interval care nu conține originea sau a unui interval care conține originea, dar nu este de lungime

egală cu 1 nu coincide cu lungimea acestui interval. Sînt astfel încălcate cele două condiții formulate mai sus. Problema naturală care se pune acum este aceea de a vedea dacă prin adoptarea acestor cerințe, ca proprietăți obligatorii ale măsurii, mai este posibil să definim o măsură pe corpul tuturor părților spațiului euclidian $n$-dimensional. Însă pentru ca problema să capete o formă precisă, va trebui în prealabil să precizăm clasa de deplasări în raport cu care măsurabilitatea și măsura vor trebui să fie invariante.

Fie $\varphi$ o funcție definită pe spațiul euclidian $n$-dimensional $R^n$, cu valori în același spațiu. Vom spune că $\varphi$ este o izometrie, dacă pentru orice pereche de puncte $x$ și $y$ ale spațiului distanța de la $x$ la $y$ coincide cu distanța de la $\varphi(x)$ la $\varphi(y)$. Ne vom referi, în cele ce urmează, numai la izometrii ale dreptei numerice în ea însăși.

Se constată ușor că o izometrie a dreptei este obligatoriu o aplicație biunivocă a dreptei pe ea însăși. În plus, se poate arăta că orice izometrie a dreptei numerice este de unul dintre următoarele două tipuri: $\varphi(x) = x + d$ sau $\varphi(x) = -x + d$ (unde $d$ este un număr real). Se mai poate arăta că măsurabilitatea și măsura Lebesgue sînt invariante față de o izometrie.

Acum putem formula problema care ne preocupă într-o formă precisă:

Există o măsură definită pentru toate părțile dreptei numerice, invariantă față de orice izometrie a dreptei și reducîndu-se, în cazul intervalelor, la lungimea obișnuită?

Vom arăta că răspunsul la această întrebare este negativ (ceea ce constitue o reabilitare a măsurii Lebesgue în fața reproșului pe care i-l adresam, pentru mulțimile nemăsurabile la care ea conduce).

Să considerăm un șir $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de mulțimi mutual disjuncte, obținute una din alta prin cîte o izometrie și nemăsurabile Lebesgue, astfel încît

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

(În obținerea mulțimilor $A_k$, cu proprietățile de mai sus, se folosește metoda aplicată în demonstrarea existenței mulțimilor nemăsurabile Lebesgue.)

Să presupunem acum, prin absurd, că există o măsură $\mu$ cu toate proprietățile enumerate mai sus. Vom avea

$$\mu\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \mu\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right).$$

Dar intervalele $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ și $[0, 1]$ se obțin unul din celălalt printr-o translație; mulțimile $A_k$ au aceeași măsură, fie ea $\lambda$, iar intervalul $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ este o mulțime mărginită. Rezultă că $1 \leqslant \lambda + \lambda + \ldots + \lambda + \ldots < +\infty$, ceea ce este imposibil atît pentru $\lambda > 0$, cît și pentru $\lambda = 0$. Am ajuns astfel la o contradicție care arată că existența unei măsuri cu proprietățile dorite nu este posibilă.

Așadar existența mulțimilor nemăsurabile Lebesgue are o rațiune profundă, decurgînd din natura complexă a cerințelor la care trebuia să răspundă măsura Lebesgue. În această ordine de idei, este semnificativă și următoarea teoremă a lui Banach și Kuratowski: Admițînd ipoteza continuului (adică inexistența unei mulțimi nenumărabile de numere reale, care nu este echivalentă cu mulțimea tuturor numerelor reale), nu există nici o măsură neidentic nulă definită pentru toate părțile intervalului [0, 1] și anulîndu-se pentru orice mulțime care se reduce la un punct. Să spunem, cu acest prilej, că pe baza rezultatelor lui Gödel și Cohen ipoteza continuului este, ca și axioma alegerii, o propoziție independentă.

## INTEGRALELE LUI DENJOY ȘI INTEGRALA LUI PERRON

În 1912, matematicianul francez Arnaud Denjoy a introdus o integrală care avea să se dovedească superioară integralei Lebesgue cel puțin din punctele de vedere discutate în penultimul paragraf: integrarea sumelor de serii trigonometrice și integrarea funcțiilor derivate. Integrala lui Denjoy se definește printr-un proces complicat de inducție transfinită, pe care nu-l putem expune aici. Vom prezenta însă o altă integrală, introdusă de către matematicianul

german Oscar Perron în 1914, integrală despre care s-a constatat ulterior (G. Hacke 1921, P. S. Alexandrov 1924, G. Looman 1925) că este echivalentă cu integrala Denjoy: O funcție reală definită pe $[a, b]$ este integrabilă Denjoy pe $[a, b]$, dacă și numai dacă ea este integrabilă Perron pe $[a, b]$, iar valorile celor două integrale sînt egale. În același timp, orice funcție sumabilă pe $[a, b]$ este integrabilă Denjoy și Perron pe $[a, b]$ iar cele trei integrale sînt egale.

Fie $F$ o funcție reală definită pe $[a, b]$ și fie $x_0$ un punct din $[a, b]$. Numerele

$$\underline{D}F(x_0) = \liminf_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}, \quad \bar{D}F(x_0) = \limsup_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

se numesc — respectiv — derivata inferioară și derivata superioară a funcției $F$ în punctul $x_0$.

Fie $f$ o funcție reală definită pe intervalul $[a, b]$ și putînd lua, eventual, și valori infinite. O funcție reală $F$, continuă pe $[a, b]$, este o semiprimitivă superioară a funcției $f$ pe $[a, b]$, dacă următoarele trei condiții sînt îndeplinite:

1) $F(a) = 0$; 2) $\underline{D}F(x) > -\infty$ pentru orice $x$ din $[a, b]$;

3) $\underline{D}F(x) \geqslant f(x)$ pentru orice $x$ din $[a, b]$.

Funcția reală $F$, continuă pe $[a, b]$, este o semiprimitivă inferioară a funcției $f$ pe $[a, b]$, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții: 1) $F(a) = 0$; 2) $\bar{D}F(x) < +\infty$ pentru orice $x$ din $[a, b]$; 3) $\bar{D}F(x) \leqslant f(x)$ pentru orice $x$ din $[a, b]$.

Noțiunile de semiprimitivă inferioară și semiprimitivă superioară sînt extensiuni ale noțiunii de primitivă: dacă funcția reală $f$ este derivata funcției $F$ pe intervalul $[a, b]$ și dacă $F(a) = 0$, atunci $F$ este, în același timp, o semiprimitivă inferioară și o semiprimitivă superioară a funcției $f$ pe $[a, b]$.

Vom spune că funcția reală $f$, definită pe $[a, b]$, este integrabilă Perron pe $[a, b]$, dacă următoarele două condiții sînt îndeplinite:

α) funcția $f$ admite pe $[a, b]$ cel puțin o semiprimitivă inferioară și cel puțin o semiprimitivă superioară;

β) marginea inferioară a valorilor luate de semiprimitivele superioare ale lui $f$ în punctul $b$ este egală cu

marginea superioară a valorilor luate de semiprimitivele inferioare ale lui $f$ în acelaşi punct $b$.

Dacă funcţia $f$ este integrabilă, numim valoarea comună a celor două margini despre care este vorba în condiţia β integrala Perron a funcţiei $f$ pe $[a, b]$.

Vom da acum trei leme, pe baza cărora vom putea arăta că orice derivată finită este integrabilă Perron şi are loc, pentru ea, o formulă de tip Leibniz-Newton.

*Lema 1.* Fie $U$ şi $V$ două funcţii finite pe $[a, b]$. Dacă pentru un punct $x_0$ din $[a, b]$ avem $\underline{D}U(x_0) > -\infty$, $\overline{D}V(x_0) < -\infty$, atunci, notînd $R(x) = U(x) - V(x)$, avem $\underline{D}R(x_0) \geqslant \underline{D}U(x_0) - \overline{D}V(x_0)$.

*Demonstraţie.* Fie $\{h_k\}$ un şir pentru care $h_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $h_k \to 0$ şi

$$\lim \frac{R(x_0 + h_k) - R(x_0)}{h_k} = \underline{D}R(x_0).$$

Rezultă existenţa limitelor

$$\lambda = \lim \frac{U(x_0 + h_k) - U(x_0)}{h_k}, \qquad \mu = \lim \frac{V(x_0 - h_k) - V(x_0)}{h_k}.$$

În baza inegalităţilor din ipoteză, avem $\lambda > -\infty$ şi $\mu < -\infty$, deci are sens diferenţa $\lambda - \mu$, şi avem $\underline{D}R(x_0) = \lambda - \mu$. Lema 1 rezultă acum imediat, observînd că $\lambda \geqslant \underline{D}U(x_0)$ şi $\mu \leqslant \overline{D}V(x_0)$.

*Lema 2.* Dacă $U$ este o semiprimitivă superioară, iar $V$ este o semiprimitivă inferioară a funcţiei $f$ pe $[a, b]$, atunci diferenţa $R(x) = U(x) - V(x)$ este o funcţie monoton crescătoare.

*Demonstraţie.* În baza lemei 1, avem pentru orice $x$ din $[a, b]$: $\underline{D}R(x) \geqslant \underline{D}U(x) - \overline{D}V(x) \geqslant 0$. Însă se poate arăta că dacă toate numerele derivate ale unei funcţii reale, definite pe $[a, b]$), sînt nenegative pe $[a, b]$, atunci funcţia în cauză este monoton crescătoare. Observăm că funcţia $R$ satisface aceste premise, deci ea este monoton crescătoare pe $[a, b]$.

*Corolarul 1.* În condiţiile lemei 2, avem $U(b) \geqslant V(b)$.

*Lema 3.* Dacă funcţia reală $f$ este derivata funcţiei $F$ pe $[a, b,]$ şi dacă $F(a) = 0$, atunci numărul $F$(b) este cel mai mic dintre numerele $U(b)$ şi cel mai mare dintre

numerele $V(b)$ (unde $U$ parcurge toate semiprimitivele superioare, iar $V$ toate semiprimitivele inferioare ale lui $f$ pe $[a, b]$).

*Demonstrație.* Lema 3 este o consecință imediată a faptului că $F$ este, pentru $f$, atît semiprimitivă inferioară, cît și semiprimitivă superioară.

Putem trece acum la enunțarea rezultatului anunțat, observînd că el este o consecință a lemelor 2 și 3 de mai sus:

Dacă funcția $F$ admite în fiecare punct din $[a, b]$ o derivată finită $f$, atunci $f$ este integrabilă Perron pe $[a, b]$, iar integrala Perron a funcției $f$ pe $[a, b]$ este egală cu diferența valorilor lui $F$ în punctele $b$ și $a$.

Atragem atenția asupra faptului că în teorema de mai sus nu se poate renunța la ipoteza de finitudine a funcției $f$ (după cum a arătat V. I. Kozlov în 1951). Există derivate care devin infinite chiar într-o infinitate de puncte, dar se poate arăta că această infinitate nu poate fi decît de măsură nulă. Pătrundem astfel într-o zonă în care nici integrala Perron nu mai poate face față scopului propus, acela al validării formulei lui Leibniz și Newton.

După cum am afirmat mai sus, integrala introdusă de Denjoy în 1912 este echivalentă cu integrala Perron. Din acest motiv, ea a primit numele de integrala Denjoy-Perron. Este interesantă reacția lui Denjoy la demonstrarea echivalenței dintre integrala sa și integrala lui Perron. Denjoy s-a arătat nemulțumit de metoda lui Perron, obiectîndu-i caracterul ei neefectiv. El observa că dacă se cere un avion cu o anumită viteză $k$, sînt posibile două răspunsuri: construirea avionului respectiv (aceasta ar fi metoda lui Denjoy) sau, ordonînd avioanele după viteza lor, considerarea marginii inferioare a avioanelor cu viteză superioară lui $k$ (aceasta ar fi metoda lui Perron!). În fapt, cele două metode s-au dovedit a fi egal de utile în analiză, stimulînd fiecare dezvoltarea ulterioară a teoriei integralei.

Să precizăm acum natura raporturilor dintre integrala Lebesgue și integrala Denjoy-Perron, încercînd apoi să observăm cît de mult se poate deosebi structura unei funcții integrabile Perron de aceea a unei funcții sumabile.

Dacă funcția $f$ este sumabilă pe $[a, b]$, atunci ea este integrabilă Perron pe $[a, b]$ și cele două integrale sînt egale.

Din acest rezultat se poate deduce imediat un altul, deosebit de semnificativ. Fie $U(x)$ o semiprimitivă superioară a funcției $f$, presupusă integrabilă Perron și nenegativă pe $[a, b]$. Din inegalitățile $\underline{D}U(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ rezultă că $U(x)$ este o funcție monoton crescătoare și deci derivata ei (care există în orice caz aproape peste tot) este sumabilă pe $[a, b]$. Ținînd seama că în fiecare punct în care $U$ admite derivată, avem $0 \leqslant f(x) \leqslant U'(x)$, rezultă:

Orice funcție nenegativă și integrabilă Perron pe $[a, b]$ este sumabilă pe $[a, b]$.

Cu alte cuvinte, superioritatea integralei Perron în raport cu integrala Lebesgue se manifestă numai în ceea ce privește funcțiile de semn variabil. În particular, rezultă că orice derivată finită și nenegativă este sumabilă. O altă consecință importantă a rezultatului obținut este aceea că fenomenul de convergență absolută nu poate apărea la integrala Perron decît atunci cînd aceasta există și ca integrală Lebesgue. Integrala Denjoy-Perron, în ceea ce are ea specific, este semiconvergentă.

Un rezultat oarecum dezamăgitor, în sensul că dezvăluie caracterul destul de limitat al progresului realizat de integrala Perron, este cel care afirmă măsurabilitatea Lebesgue a oricărei funcții integrabile Perron pe $[a, b]$. Într-adevăr, notînd cu $F(x)$ integrala Perron a funcției $f$ de la $a$ la $x$ și prelungind funcția $F$ la dreapta lui $b$, punînd $F(x) = F(b)$ pentru $x > b$, observăm că aproape pentru orice $x$ din $[a, b]$ avem

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} n \left[ F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right].$$

Însă se poate arăta că $F$ este continuă pe $[a, b]$, deci $f$ este, aproape peste tot pe $[a, b]$, limita unui șir de funcții continue. Așadar $f$ este măsurabilă Lebesgue pe $[a, b]$.

După cum am văzut, cu integrala Denjoy-Perron se poate integra orice derivată finită. Însă în prezentarea conceptului de funcție măsurabilă Lebesgue se constată că tipul de derivabilitate legat în mod natural de măsura-

bilitatea Lebesgue nu este derivabilitatea obișnuită, ci derivabilitatea aproximativă (sau asimptotică). Derivabilitatea aproximativă a funcției $F$ în punctul $x_0$ revine la existența și finitudinea limitei raportului

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

printr-o mulțime care admite punctul $x_0$ ca punct de densitate. (Noțiunea de punct de densitate al unei mulțimi a fost prezentată în paragraful (5) din capitolul I). Constatîndu-se că nu orice derivată aproximativă este integrabilă Denjoy-Perron, s-a simțit nevoia unei integrabilități mai generale. Ca urmare a acestui fapt, în 1916 Arnaud Denjoy și, independent de el, A. I. Hincin introduc o integrală mai generală decît integrala Denjoy-Perron. Noua integrală a primit denumirea de integrala Denjoy-Hincin. Cu ajutorul ei se poate integra orice derivată aproximativă finită.

Dacă definiția constructivă a integralelor Denjoy-Perron și Denjoy-Hincin este prea complicată din punct de vedere tehnic pentru a o putea prezenta aici, ne va fi în schimb mai ușor să prezentăm definiția lor descriptivă, echivalentă cu cea constructivă. Această definiție are și avantajul de a da o idee mai precisă asupra deosebirii dintre funcțiile care sînt integrale Lebesgue nedefinite și funcțiile care sînt integrale Denjoy nedefinite. Vom vedea că există extensiuni ale proprietății de continuitate absolută care caracterizează integralele Denjoy nedefinite exact așa cum continuitatea absolută caracterizează integralele Lebesgue nedefinite. O funcție reală $f$, de o variabilă reală, este, prin definiție, absolut continuă pe o mulțime $E$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$, cu proprietatea că oricare ar fi șirul de intervale $\{[a_k, b_k]\}$ fără puncte interioare comune două cîte două, dar ale căror extremități $a_k$, $b_k$ aparțin lui $E$, inegalitatea

$$\sum_k (b_k - a_k) < \eta$$

implică inegalitatea

$$\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Dacă o funcţie reală $F$, de o variabilă reală, este continuă pe mulţimea $E$, iar $E$ este o reuniune cel mult numărabilă de mulţimi $E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, cu proprietatea că $F$ este absolut continuă pe fiecare mulţime $E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, atunci spunem că $F$ este absolut continuă în sens generalizat pe mulţimea $E$.

Se poate arăta că orice funcţie absolut continuă în sens generalizat pe o mulţime $E$ măsurabilă Lebesgue este aproximativ derivabilă aproape peste tot pe $E$. Orice funcţie absolut continuă pe un interval $[a, b]$ este absolut continuă în sens generalizat pe $[a, b]$, dar reciproca nu este adevărată.

Acum putem introduce pe o cale descriptivă integrabilitatea şi integrala Denjoy-Hincin.

Spunem că o funcţie reală $f$ definită aproape peste tot pe $[a, b]$ este integrabilă Denjoy-Hincin pe $[a, b]$, dacă există o funcţie $F$, absolut continuă în sens generalizat pe $[a, b]$, astfel încît derivata aproximativă a lui $F$ să fie egală — aproape peste tot pe $[a, b]$ — cu $f$. Diferenţa $F(b) - F(a)$ se numeşte integrala Denjoy-Hincin a funcţiei $f$ pe $[a, b]$. Valoarea acestei integrale nu depinde de alegerea funcţiei $F$ cu proprietatea indicată, deoarece se poate arăta că dacă două funcţii absolut continue în sens generalizat au aproape peste tot pe $[a, b]$ aceeaşi derivată aproximativă, atunci cele două funcţii diferă printr-o constantă.

Pentru a introduce pe cale descriptivă integrabilitatea şi integrala Denjoy-Perron, vom defini, în prealabil, o altă extensiune a proprietăţii de continuitate absolută, extensiune mai puţin largă decît cea folosită în definiţia integralei Denjoy-Hincin.

O funcţie reală $g$ de o variabilă reală este, prin definiţie, absolut continua în sens restrîns pe mulţimea mărginită $E$, dacă $g$ este mărginită pe un anumit interval conţinînd pe $E$ şi daca, în plus, există pentru orice $\varepsilon > 0$ un $\eta > 0$, astfel încît, oricare ar fi şirul $\{I_k\}$ de intervale fară puncte interioare comune două cîte două şi ale căror extremităţi aparţin lui $E$, inegalitatea

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

(unde prin $|I_k|$ s-a notat lungimea lui $I_k$), implică inegalitatea

$$\sum_k \omega(g;\ I_k) < \varepsilon,$$

unde $\omega(g;\ I_k)$ reprezintă oscilația funcției $g$ pe intervalul $I_k$.

O funcție reală $G$ de o variabilă reală este, prin definiție, absolut continuă în sens cvasigeneralizat pe mulțimea $E$, dacă $G$ este continuă pe $E$ și dacă $E$ se poate exprima ca o reuniune cel mult numărabilă de mulțimi mărginite $E_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), astfel încît $G$ este absolut continuă în sens restrîns pe fiecare $E_n$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Se poate arăta că orice funcție absolut continuă în sens cvasigeneralizat pe $[a, b]$ este derivabilă aproape peste tot pe $[a, b]$. O funcție absolut continuă pe $[a, b]$ este absolut continuă în sens cvasigeneralizat pe $[a, b]$, dar reciproca nu este adevărată.

Fiind dată o funcție reală $f$ definită aproape peste tot pe $[a, b]$, spunem că $f$ este integrabilă Denjoy-Perron pe $[a, b]$, dacă există o funcție reală $F$, absolut continuă în sens cvasigeneralizat pe $[a, b]$, astfel încît, aproape peste tot pe $[a, b]$, derivata lui $F$ este egală cu $f$. Diferența $F(b)—F(a)$ se numește integrala Denjoy-Perron a funcției $f$ pe $[a, b]$; ea este unic determinată, deoarece două funcții absolut continue în sens cvasigeneralizat, care au aproape peste tot pe $[a, b]$ aceeași derivată, diferă printr-o constantă.

## DE LA STIELTJES LA RIESZ. O NOUĂ PERSPECTIVĂ ÎN TEORIA INTEGRALEI

La sfîrșitul secolului trecut, matematicianul francez, de origine olandeză, Th. Stieltjes a imaginat o extensiune a integralei Riemann, care cîtva timp a trecut neobservată, pînă ce matematicianul maghiar Fr. Riesz a adus-o în centrul atenției, la sfîrșitul primului deceniu al secolului nostru, printr-un rezultat surprinzător.

Unele probleme din teoria fracțiilor continue, precum și unele probleme de mecanică, cum ar fi aceea a definirii

și determinării momentului static al unei bare, l-au condus pe Stieltjes la un proces de integrare a unei funcții $f$ în raport cu o altă funcție $g$, ambele funcții fiind definite pe un același interval $[a, b]$. Integrabilitatea și integrala Stieltjes se definesc ca și integrabilitatea și integrala Riemann, cu singura deosebire că în locul sumelor (5) (a se vedea paragraful 12 al acestui capitol) se consideră sumele

$$\sigma_\Delta(f, g, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)), \qquad (14)$$

unde $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$. După cum se vede, sumele (5) sînt acel caz particular al sumelor (14) în care funcția $g$ este chiar aplicația identică a intervalului $[a, b]$. Sumele (14) manifestă însă o sensibilitate incomparabil mai mare decît sumele (5). Să considerăm, de pildă, următoarele trei restricții: $\alpha$) $\xi_i = x_i$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$ (această restricție, impusă sumelor (5), conduce la sumele considerate de (Cauchy); $\beta$) $\xi_i = x_{i+1}$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$; $\gamma$) $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ pentru $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Nici una dintre restricțiile $\alpha$, $\beta$ și $\gamma$, aplicate sumelor (5), nu se repercutează asupra tipului de integrabilitate și de integrală obținut; se poate arăta că de fiecare dată se obține integrabilitatea și integrala Riemann. În schimb, fiecare dintre restricțiile $\alpha$, $\beta$ și $\gamma$, aplicate sumelor (14), conduce la un alt tip, la o altă noțiune de integrabilitate Stieltjes.

Să introducem acum un tip nou de trecere la limită pentru sumele integrale, considerate ca funcții de diviziunea $\Delta$. Vom spune că sumele $\sigma_\Delta$ au ca „limită după finețe" numărul $I$, dacă fiecărui număr pozitiv $\varepsilon$ îi corespunde o diviziune $\Delta'$ a lui $[a, b]$, astfel încît pentru orice diviziune $\Delta$ mai fină decît $\Delta'$ să avem $|\sigma_\Delta - I| < \varepsilon$. Se poate arăta că luînd limita după finețe a sumelor (5), obținem tot integrabilitatea și integrala Riemann; acest lucru rămîne adevărat chiar dacă impunem sumelor (5) una oarecare dintre restricțiile $\alpha$, $\beta$ și $\gamma$, definite mai sus. În schimb, limita după finețe a sumelor (14), luată fără nici o restricție asupra valorilor sau combinată cu una dintre restricțiile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, conduce la patru tipuri noi de integrabilitate Stieltjes. Am inventariat deci, pînă în

momentul de față, opt tipuri distincte de integrabilitate Stieltjes, dar aceste opt tipuri se reduc, în cazul în care $g$ este aplicația identică, la unul și același tip de integrabilitate: cea în sensul lui Riemann.

Acest contrast între „insensibilitatea" sumelor (5) și susceptibilitatea deosebită a sumelor (14) nu se oprește aici. Se știe că la integrala Riemann se poate ajunge și prin considerarea sumelor Darboux, adică a acelor sume care se obțin din (5), înlocuind pe $f(\xi_i)$ prin $m_i$, respectiv $M_i$ (unde $m_i$ și $M_i$ sînt marginile inferioară și superioară ale funcției $f$ pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$). În schimb, presupunînd că funcția $f$ este mărginită pe $[a, b]$ și că funcția $g$ este crescătoare pe $[a, b]$ și înlocuind sumele (14) prin sumele Darboux-Stieltjes corespunzătoare, se obține un tip de integrabilitate Stieltjes diferit de cel obișnuit. Combinînd considerarea sumelor Darboux-Stieltjes cu restricțiile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ și adoptînd, alternativ, pentru sumele $\sigma_\Delta$ limita obișnuită (numită și limita după normă) și limita după finețe, obținem un mare număr de tipuri noi de integrabilitate Stieltjes. Trebuie să spunem că multe dintre tipurile de integrabilitate Stieltjes obținute pe căile indicate mai sus intervin efectiv în diferite capitole ale matematicii. Astfel, pentru a da un singur exemplu, integrabilitatea Stieltjes definită cu ajutorul sumelor (14), neimpunînd nici una dintre restricțiile $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dar adoptînd limita după finețe, este fundamentală în teoria probabilităților.

Rezultatul surprinzător obținut de Riesz se referă la tipul de integrabilitate Stieltjes definit cu ajutorul sumelor (14), fără a se impune vreo restricție suplimentară valorilor $\xi_i$ și adoptîndu-se limita după normă. O teoremă elementară afirmă că orice funcție $f$ continuă pe $[a, b]$ este integrabilă Stieltjes în raport cu orice funcție $g$ cu variația mărginită pe $[a, b]$. Fiind dată o funcție $g$ cu variație mărginită pe $[a, b]$, să notăm cu $F(f)$ integrala Stieltjes a funcției $f$, continue pe $[a, b]$, în raport cu $g$. $F$ este deci o aplicație definită pe mulțimea funcțiilor continue pe $[a, b]$ și cu valori reale. Se arată ușor că există o constantă $k$ cu proprietatea

$$|F(f)| \leqslant k \cdot M(f), \tag{15}$$

unde prin $M(f)$ s-a notat maximul lui $f$ pe $[a, b]$. (Este suficient să luăm pe $k$ egal cu variația totală a lui $g$ de la $a$ la $b$.) Pe de altă parte, fiind date două funcții $f_1$ și $f_2$, continue pe $[a, b]$, avem, cum se verifică ușor.

$$F(f_1 + f_2) = F(f_1) + F(f_2). \tag{16}$$

Orice aplicație $F$ a mulțimii funcțiilor continue pe $[a, b]$ în dreapta numerică, avînd proprietățile (15) și (16), constituie, prin definiție, o funcțională liniară pe spațiul $\mathcal{C}$ al funcțiilor continue. Rezultă deci că fiecare funcție $g$, cu variație mărginită pe $[a, b]$, induce o astfel de funcțională liniară $F$, funcțională care asociază fiecărei funcții $f$, continue pe $[a, b]$, integrala Stieltjes a acestei funcții în raport cu $g$. Rezultatul remarcabil al lui Riesz constă în descoperirea faptului că funcționalele liniare pe $\mathcal{C}$, induse de funcții cu variație mărginită, epuizează toate funcționalele liniare existente pe $\mathcal{C}$. Cu alte cuvinte, fiind dată o aplicație $F$ a lui $\mathcal{C}$ în $R$, cu proprietățile (15) și (16), există o funcție $g$ cu variație mărginită pe $[a, b]$, astfel încît pentru orice funcție $f$ continuă pe $[a, b]$, $F(f)$ este tocmai integrala Stieltjes a lui $f$ în raport cu $g$ pe $[a, b]$.

Se deschide astfel o perspectivă cu totul nouă, atît în teoria integralei Stieltjes, cît și în aceea a funcționalelor liniare. Pe de o parte, orice funcțională liniară pe $\mathcal{C}$ admite o reprezentare integrală, pe de altă parte, integrala Stieltjes poate fi definită ca o funcțională liniară. Acest punct de vedere a contaminat întreaga dezvoltare ulterioară a teoriei integralei. În particular, chiar pentru diferitele tipuri de integrale Stieltjes, despre care s-a vorbit mai sus, s-au studiat funcționalele liniare asociate. Aici, apar pe primul plan dependența integralei de funcția care se integrează, proprietățile algebrice ale acestei dependențe și modul de organizare algebrică a mulțimii funcțiilor integrabile. Dar cu aceasta pătrundem într-o etapă nouă a dezvoltării analizei, etapă în care studiul funcțiilor individuale este înlocuit prin studiul claselor de funcții și al diferitelor aplicații definite pe aceste clase.

# V

## Ce se întîmplă dincolo de mulțimile și funcțiile boreliene?

### INTRODUCERE

La 8 ianuarie 1967 s-au împlinit cincizeci de ani de de cînd matematicianul francez Jacques Hadamard a prezentat la Academia de Științe din Paris notele, care aveau să devină celebre, a doi matematicieni din Moscova, Mihail Suslin și Nikolae Luzin. În aceste note se semnala existența unei clase de mulțimi necunoscute pînă atunci, numite de descoperitorii lor „mulțimi analitice". Teoria acestor mulțimi n-a încetat, pînă astăzi, să pună matematicienilor probleme pasionante, dar deosebit de grele.

În capitolul de față vom prezenta unele aspecte ale acestei teorii destul de puțin cunoscută la noi în țară, mai cu seamă de către matematicienii tineri. Unele rezultate remarcabile referitoare la mulțimile analitice au fost publicate în revista „Mathematica" de la Cluj.

Noțiunea de mulțime analitică a fost introdusă de Mihail Suslin în 1917, iar noțiunea de mulțime proiectivă a fost introdusă de Nikolae Luzin în 1924. Teoria acestor mulțimi este de o mare profunzime. În special, mulțimile proiective prezintă proprietăți atît de surprinzătoare, încît Luzin a pus însăși problema legitimității lor.

Multe din problemele legate de aceste mulțimi sînt atît de grele, încît ele se află astăzi, după aproape cincizeci de ani de la apariție, aproape în același stadiu ca atunci cînd au fost puse. Matematicienii nu le-au putut încă rezolva. Paralel cu aceasta, dezvoltarea matematicii în ultimele decenii a scos de nenumărate ori în evidență importanța mulțimilor analitice și proiective, modul

natural în care ele apar în cele mai variate probleme de teoria funcțiilor de variabilă reală, topologie, analiză funcțională și chiar în teoria funcțiilor de variabilă compexă.

## O GREȘEALĂ BINE INSPIRATĂ

Descoperirea de către Suslin a mulțimilor analitice este legată de o întîmplare puțin obișnuită pentru o mare descoperire. Suslin era elevul lui Luzin. Luzin, în afară de faptul că era un mare om de știință, era și mare animator. El a avut mulți elevi și a determinat, în bună măsură, direcția de dezvoltare a școlii matematice din Moscova. De altfel, se știe că școala sovietică de topologie, ai cărei pionieri sînt P. S. Aleksandrov și P. Urîson, este născută din preocupările de teoria funcțiilor reale inițiate de Egorov și mai ales de Luzin.

Luzin a remarcat repede talentul matematic al lui Suslin și i-a recomandat să studieze celebrul memoriu al lui Lebesgue: *Sur les fonctions représentables analytiquement*, memoriu care pune multe probleme („Journal de mathématiques pures et appliquées", 1905).

Într-o zi, Suslin se prezintă la profesorul său, spunîndu-i că a găsit o greșeală în memoriul lui Lebesgue. Matematicianul polonez Waclaw Sierpiński, care a fost martor la această scenă, povestește că Luzin l-a ascultat cu multă atenție pe elevul său, în ciuda faptului că era puțin plauzibil ca el într-adevăr să fi găsit o greșeală în memoriul unui matematician atît de mare ca Lebesgue. Observația lui Suslin s-a dovedit justă. Pentru a înțelege în ce constă ea, trebuie să spunem mai întîi că funcțiile reprezentabile sau exprimabile analitic, pe care le consideră Lebesgue în memoriul său, coincid cu funcțiile boreliene sau, ceea ce este tot una, cu funcțiile din clasificația lui Baire (aceste noțiuni vor fi definite mai jos). Lebesgue enunță și încearcă să demonstreze următoarea teoremă: „O funcție definită implicit cu ajutorul unor reprezentări analitice este exprimabilă analitic în mod explicit". Particularizînd, dar făcîndu-l mai clar, acest enunț revine

la următorul: „Dacă $x = f(t)$ este o funcție reprezentabilă analitic și inversabilă, atunci funcția inversă $t = \varphi(x)$ este de asemenea reprezentabilă analitic“. Demonstrația lui Lebesgue decurge astfel: „Datorită ipotezei, se poate arăta că mulțimea punctelor din planul coordonatelor $t$, $x$ în care $x - f(t) = 0$ este o mulțime boreliană $E$. Deci oricare ar fi $\alpha < \beta$, partea $B$ a lui $E$ pentru care $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ este o mulțime boreliană. Însă proiecția, pe axa absciselor, a unui interval bidimensional este un interval unidimensional, proiecția unei reuniuni de mulțimi este reuniunea proiecțiilor acestor mulțimi, iar proiecția intersecției unui șir descrescător de mulțimi este egală cu intersecția proiecțiilor mulțimilor din șir. Ținînd seamă că mulțimile boreliene coincid cu mulțimile care se obțin pornind de la intervale, prin aplicarea repetată a operațiilor de reuniune numărabilă și intersecție de șiruri descrescătoare, rezultă că proiecția mulțimii $B$ pe axa $t = 0$ este o mulțime boreliană. Prin aceasta s-a demonstrat că funcția $t = \varphi(x)$ este boreliană“.

Nu este greu de găsit greșeala în această demonstrație. Afirmația că proiecția intersecției unui șir descrescător de mulțimi este egală cu intersecția proiecțiilor acestor mulțimii este falsă.

Într-adevăr, fie $E_n$ mulțimea tuturor punctelor din plan, ale căror coordonate $x$, $y$ satisfac condițiile $x = 0$, $0 < y < \frac{1}{n}$. Este vizibil că nu există nici un punct comun tuturor mulțimilor $E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, deci proiecția pe axa absciselor a mulțimii $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ este mulțimea vidă. Pe de altă parte, oricare ar fi $n$, proiecția pe axa absciselor a mulțimii $E_n$ este nevidă, fiind formată dintr-un punct: originea. Deci intersecția proiecțiilor mulțimilor $E_n$ $(n = 1, 2, \ldots,)$ pe axa absciselor este nevidă.

Important nu este faptul că Suslin a găsit o greșeală în memoriul lui Lebesgue. Pentru Lebesgue, această greșeală era explicabilă din punct de vedere psihologic, ea fiind legată de o chestiune laterală față de scopul prin-

cipal al memoriului său. Greșeala este cu totul locală și nu atinge cu nimic valoarea acestui memoriu. Intuiția lui Lebesgue a fost, de altfel, justă. Într-adevăr, ulterior Luzin a dat o demonstrație corectă teoremei lui Lebesgue, Această demonstrație se sprijină în mod esențial pe teoria mulțimilor analitice și, pînă astăzi, nu se cunoaște o posibilitate de a demonstra teorema lui Lebesgue fără a se recurge la mulțimi analitice.

Ceea ce este important este faptul că Suslin, analizînd pînă la capăt greșeala lui Lebesgue, a descoperit că o operație atît de simplă, cum este proiecția, aplicată unei mulțimi boreliene, poate să conducă la o mulțime neboreliană. Mulțimile analitice liniare nu sînt altceva decît mulțimile liniare care se obțin ca proiecții ale mulțimilor boreliene din plan.

Din păcate, Suslin a murit foarte tînăr (în 1918). Luzin este cel care a construit întreaga teorie a mulțimilor analitice, cu prelungirea ei firească, teoria mulțimilor proiective. Această teorie a lui Luzin, împreună cu contribuția inițială a lui Suslin, se află expusă într-o carte celebră (a lui Luzin, publicată la Paris, în limba franceză): *Lecții despre mulțimile analitice și aplicațiile lor*. În 1953 a apărut la Moscova o ediție nouă a acestei cărți, ediție îngrijită de doi dintre cei mai valoroși continuatori ai lui Luzin, Ludmila Keldîș și P. S. Novikov (Luzin a murit în 1950). Această ediție conține, sub formă de completări și observații, unele contribuții care s-au adus în teoria mulțimilor analitice și proiective după apariția primei ediții a acestei cărți, în 1930.

Luzin, în modestia sa, merge pînă acolo încît atribuie lui Lebesgue meritul de a fi descoperit mulțimile analitice, deoarece (după cum vom arăta) construcția acestor mulțimi este implicit conținută în memoriul lui Lebesgue. Dar Lebesgue, în prefața pe care a scris-o la ediția franceză a cărții lui Luzin, „se apără“ de această descoperire, despre care mărturisește că nu a avut nici cea mai vagă intuiție, arătînd în același timp valoarea și frumusețea incontestabilă a acestei teorii.

Deşi, după cum vom vedea, putem ajunge la noţiunea de mulţime analitică fără a cunoaşte noţiunea de mulţime boreliană, este totuşi preferabil să amintim mai întîi definiţia şi unele proprietăţi ale mulţimilor boreliene.

Fie o mulţime $X$. Toate mulţimile considerate mai jos vor fi părţi ale lui $X$.

O familie $S$ nevidă de mulţimi formează un corp, dacă operaţiile de reuniune cel mult numărabilă şi de diferenţă, aplicate mulţimilor din $S$, conduc tot la mulţimi din $S$.

Este uşor de văzut că fiind date mai multe corpuri de mulţimi, mulţimile care sînt comune tuturor acestor corpuri formează de asemenea un corp (chiar dacă familia de corpuri este infinită).

Fie acum o familie $A$ de părţi ale lui $X$. Să considerăm totalitatea corpurilor care conţin mulţimile familiei $A$. Există cel puţin un astfel de corp, de pildă cel format din toate părţile lui $X$. Intersecţia acestor corpuri este tot un corp care conţine pe $A$ şi este „cel mai mic" corp care conţine mulţimile familiei $A$. Acest corp se numeşte corpul generat de $A$ şi se notează cu $S(A)$.

Să presupunem acum că $X$ este spaţiul euclidian cu $n$ dimensiuni. Fie $A$ familia tuturor intervalelor deschise $n$-dimensionale. Este uşor de văzut că $A$ nu formează un corp. Corpul $S(A)$ se numeşte corpul mulţimilor boreliene din spaţiul euclidian $n$-dimensional. Importanţa acestui corp decurge din faptul că cele mai multe probleme care se pun în teoria clasică a funcţiilor de variabilă reală sau a celor de variabilă complexă, conduc la mulţimi boreliene. Luzin a comparat rolul mulţimilor boreliene în raport cu mulţimile în genere, cu acela al numerelor raţionale în raport cu numerele reale. Intervalele sînt cele mai simple mulţimi boreliene. Importanţa lor în analiză este binecunoscută. De cele mai multe ori, proprietăţile unei funcţii se studiază într-un interval. După intervale, cele mai simple mulţimi boreliene sînt mulţimile deschise şi cele închise. O mulţime deschisă este o mulţime care, o dată cu un punct al ei, conţine o întreagă sferă centrală în acest punct (sfera va trebui să aibă atîtea

dimensiuni, cîte dimensiuni are spațiul euclidian în care lucrăm). Se arată că orice mulțime deschisă este o reuniune numărabilă de intervale. Prin mulțime închisă se înțelege o mulțime a cărei complementară este deschisă. Mulțimea punctelor în care o funcție continuă întrece o valoare dată este totdeauna deschisă. Mulțimea punctelor în care o funcție continuă egalează o valoare dată este totdeauna închisă. Mulțimea punctelor de analiticitate ale unei funcții reale, de variabilă reală, sau ale unei funcții complexe de variabilă complexă este totdeauna deschisă.

Mulțimile boreliene care urmează în ordinea complicației sînt reuniunile numerabile de mulțimi închise (o astfel de reuniune se spune că este o mulțime de tipul $F_\sigma$) și intersecțiile numărabile de mulțimi deschise (o astfel de intersecție se spune că este o mulțime de tipul $G_\delta$). Complementara unei mulțimi de tipul $F_\sigma$ este o mulțime de tipul $G_\delta$ și reciproc. Fiind dată o funcție reală, arbitrară, de variabile reale, mulțimea punctelor ei de continuitate este de tipul $G_\delta$; mulțimea punctelor de discontinuitate este de tipul $F_\sigma$. Mai mult, orice mulțime de tipul $G_\delta$ este mulțimea punctelor de continuitate ale unei anumite funcții reale.

Mulțimea numerelor raționale este de tipul $F_\sigma$, dar nu este de tipul $G_\delta$. Mulțimile care sînt în același timp de tip $F_\sigma$ și de tip $G_\delta$ au o mare importanță în teoria funcțiilor reale. Astfel, matematicianul sovietic A. S. Kronrod a arătat că pentru ca o mulțime liniară să fie atît de tip $F_\sigma$, cît și de tip $G_\delta$, este necesar și suficient ca ea să fie mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții reale de o variabilă reală, derivabilă în orice punct în care este continuă,

O intersecție numărabilă de mulțimi de tipul $F_\sigma$ constituie o mulțime de tipul $G_{\sigma\delta}$. O reuniune numărabilă de mulțimi de tipul $G_\delta$ constituie un $G_{\delta\sigma}$. Fiind dat un șir de funcții reale, continue, de variabilă reală, mulțimea punctelor de convergență ale acestui șir formează un $F_{\sigma\delta}$; reciproc, orice $F_{\sigma\delta}$ este mulțimea punctelor de convergență ale unui anume șir de funcții continue.

Continuînd astfel, prin aplicarea operațiilor de reuniune numărabilă și trecere la complementară, se obțin mulțimi

boreliene din ce în ce mai complicate. Mulțimile boreliene care apar cel mai des în analiza clasică sînt cele închise, cele deschise, cele de tip $F_\sigma$ și cele de tip $G_\delta$. S-ar putea face o listă foarte bogată de proprietăți care conduc la astfel de tipuri boreliene. Pe măsură ce studiul funcțiilor a progresat, s-au întîlnit din ce în ce mai des și tipuri boreliene mai complicate, mai cu seamă în spațiul euclidian unidimensional. Mulțimile boreliene de numere reale au unele proprietăți remarcabile. Astfel, fiind dată o funcție $f$ reală, univalentă (orice valoare este luată cel mult într-un punct) de variabilă reală, care este limita unui șir convergent de funcții continue, nu numai că mulțimea valorilor lui $f$ este boreliană, dar reciproc, fiind dată o mulțime boreliană de numere reale, există o funcție $f$, reală, univalentă, limită a unui șir convergent de funcții continue, astfel încît mulțimea valorilor lui $f$ este însăși mulțimea boreliană dată. Această proprietate arată că orice mulțime boreliană, oricît de complicată ar fi ea, poate să apară în studiul unor funcții uzuale: funcțiile limită de funcții continue. Cele mai multe funcții uzuale în analiză se obțin ca limite de șiruri convergente de funcții continue. Așa sînt, de pildă, funcțiile derivate, funcțiile cu variație mărginită, funcțiile superior (sau inferior) semicontinue, funcțiile continue la stînga (sau la dreapta) în fiecare punct etc. Este deci clar că pentru teoria funcțiilor uzuale, este necesar să se întreprindă studiul proprietăților care aparțin tuturor mulțimilor boreliene și nu numai tipurilor boreliene mai simple.

Acest studiu a fost făcut și a dezvăluit proprietăți remarcabile. Astfel, orice mulțime boreliană este o imagine continuă a mulțimii numerelor iraționale. Orice imagine topologică (adică biunivocă și bicontinuă) a unei mulțimi boreliene este o mulțime boreliană. N. Luzin a pus unui elev al său, P. S. Aleksandrov (ulterior, șeful școlii sovietice de topologie), problema puterii mulțimilor boreliene. P. S. Aleksandrov a reușit să demonstreze, în 1916 (concomitent cu Hausdorff), că orice mulțime boreliană, nenumărabilă, conține o mulțime perfectă nevidă. Rezultatul lui P. S. Aleksandrov este de o mare importanță. Într-adevăr, se știa dinainte că orice mulțime perfectă

nevidă este de puterea continuului. Din teorema lui P. S. Aleksandrov rezultă deci că orice mulţime boreliană nenumărabilă este de puterea continuului. În felul acesta, mulţimile boreliene „realizează ipoteza continuului". (Ipoteza continuului afirmă că orice parte nenumărabilă a mulţimii numerelor reale este de puterea continuului, adică poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea tuturor numerelor reale.) K. Gödel a demonstrat că ipoteza continuului nu vine în contradicţie cu sistemul de axiome al teoriei mulţimilor, dacă acest sistem nu este contradictoriu în sine.

În 1963, Paul Cohen a coompletat rezultatul lui Gödel, demonstrînd că nici negaţia ipotezei continuului nu vine în contradicţie cu sistemul de axiome al teoriei mulţimilor, dacă acest sistem nu este contradictoriu. Rezultă că ipoteza continuului constituie o propoziţie independentă, aşa cum de altfel am semnalat şi în capitolul precedent.

Paralel cu mulţimile boreliene, se introduc funcţiile boreliene; o funcţie reală $f$ de o variabilă reală se numeşte boreliană, dacă mulţimea $\{x;\ f(x) > \alpha\}$ este boreliană, oricare ar fi $\alpha$. Lebesgue a arătat că funcţiile boreliene coincid cu funcţiile din aşa-numita clasificaţie a lui Baire, prezentată succint în capitolul. Funcţiile continue constituie funcţiile de clasa zero. Orice funcţie discontinuă care este limita unui şir convergent de funcţii continue este o funcţie de primă clasă. Orice funcţie care nu este continuă sau de prima clasă, dar care este limita unui şir convergent de funcţii continue sau de prima clasă, este o funcţie de-a doua clasă şi aşa mai departe. Dacă o funcţie nu este de nici o clasă finită, dar se poate obţine ca limită a unui şir convergent de funcţii de clasă finită, atunci se spune că această funcţie este de clasă $\omega$ (numită şi prima clasă transfinită). Cu ajutorul funcţiilor de clasă $\omega$ se definesc acum funcţiile de clasă $\omega + 1$, apoi cele de clasă $\omega + 2$ ş.a.m.d. Principiile după care se definesc aceste clase sînt următoarele: mulţimea claselor lui Baire este nenumărabilă; fiecare clasă este precedată de un număr finit sau o infinitate numărabilă] de clase; după orice mulţime numărabilă de clase urmează o nouă clasă. Clasa funcţiilor boreliene este cea mai mică clasă

de funcţii care conţine toate polinoamele şi astfel încît, pentru orice şir convergent de funcţii din clasă, limita şirului aparţine clasei.

Cele mai multe funcţii discontinue care intervin în analiză sînt de prima clasă Baire. Totuşi, încă în secolul trecut, Dirichlet a fost condus în mod natural să considere, de pildă, funcţia $f(x) = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} \cos (m!\, \pi x)^{2n})$, funcţie care este de a doua clasă Baire (această funcţie este egală cu 1 pentru $x$ raţional şi cu 0 pentru $x$ iraţional).

## CÎTEVA EXEMPLE „RARE"

Există mulţimi neboreliene? Există funcţii de clasă Baire oricît de mare? Există funcţii care nu aparţin clasificaţiei lui Baire? Iată întrebări care s-au pus din primul moment al apariţiei teoriilor lui Borel şi Baire. Răspunsul, la toate întrebările puse, este afirmativ şi se obţine fără mari dificultăţi. Se poate arăta că familia tuturor mulţimilor boreliene este de puterea continuului. Pe de altă parte, se poate arăta că familia tuturor mulţimilor din spaţiul euclidian este de putere mai mare decît a continuului. În felul acesta, rezultă existenţa mulţimilor neboreliene. Mai mult, se arată că orice mulţime de puterea continuului conţine o submulţime neboreliană.

Acum, ţinînd seama de teorema lui Lebesgue asupra identităţii dintre funcţiile boreliene şi funcţiile din clasificaţia lui Baire, rezultă uşor existenţa funcţiilor reale, de variabilă reală, care nu aparţin clasificaţiei lui Baire. Este suficient să considerăm o mulţime $E$ neboreliană şi să punem $f(x) = 1$, dacă $x \in E$ şi $f(x) = 0$ dacă $x \notin E$.

Demonstraţia de mai sus a nemulţumit pe unii matematicieni, din cauza caracterului ei neefectiv. Într-adevăr, demonstraţia dată nu indică un exemplu de mulţime sau de funcţie neboreliană, ci ne face cunoştinţă cu existenţa mulţimilor şi a funcţiilor neboreliene pe o cale oarecum indirectă.

Nu este deci lipsit de interes un exemplu de funcţie discontinuă, care nu este nici de prima, nici de-a doua clasă Baire.

Raţionamentul pe care-l prezentăm se aplică şi pentru a da un exemplu de funcţie care nu aparţine nici unei clase inferioare unei clase date.

Să punem

$$P_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha+\beta} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, x^{\gamma}\,.$$

Orice serie dublă de polinoame poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty}\left[\sum_{\beta=1}^{\infty} P_{\alpha,\beta}(x)\right]. \tag{1}$$

Dacă pe un anumit interval seria (1) converge, atunci ea defineşte pe acest interval o funcţie de clasă 0, 1 sau 2. Reciproc, orice funcţie de clasă 0,1 sau 2 poate fi definită în acest fel (deoarece se ştie că orice funcţie continuă este limită uniformă de polinoame) printr-o alegere convenabilă a coeficienţilor $C_{\alpha,\beta,\gamma}$. Fiecărui sistem de constante $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ să-i asociem un număr real $u$ cuprins între 0 şi 1 în aşa fel, încît corespondenţa între aceste sisteme de constante şi numerele din [0,1] să fie biunivocă.

Să definim acum pe (0, 1) o funcţie reală $f$ în felul următor: fie $0 \leqslant u \leqslant 1$. Fie $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ sistemul de constante corespunzător lui $u$. Fie (1) seria formată cu acest sistem de constante. Dacă seria (1) astfel formată, diverge sau converge către un număr diferit de zero, pentru $x = u$ punem $f(u) = 0$; dacă, dimpotrivă, seria (1) are ca sumă pe zero pentru $x = u$, punem $f(u) = 1$. Funcţia $f$ astfel definită nu coincide cu nici o funcţie de clasă 0, 1 sau 2, deoarece o astfel de funcţie, definită pe [0, 1], este reprezentabilă printr-o serie (1) convergentă pentru toate valorile lui $x$ cuprinse între 0 şi 1. Să presupunem, pentru o clipă, că $f$ se poate reprezenta printr-o astfel de serie. Fie $u$ numărul din [0,1] care corespunde sistemului $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ de coeficienţi din (1); pentru $x = u$ seria converge, deoarece $u$ este cuprins între 0 şi 1; dacă suma seriei este diferită de zero, trebuie să avem $f(u) = 0$, iar dacă suma seriei este egală cu zero, trebuie să avem $f(u) = 1$. Şi într-un caz şi în celălalt obţinem o contradicţie.

Din cele arătate rezultă că $f$ nu este de clasă 0, 1 sau 2. Dar nu rezultă, cel puțin explicit, că $f$ aparține clasificației lui Baire sau, în caz afirmativ, cărei clase îi aparține.

Se poate obține, folosind anumite modificări și completări ale raționamentului de mai sus, o funcție de clasă 3. Lebesgue a demonstrat că nici o clasă (finită sau transfinită) din clasificația lui Baire nu este vidă. Totodată, el a arătat că se pot defini, fără a utiliza axioma lui Zermelo, funcții care nu aparțin clasificației lui Baire.

Nu este locul să insistăm aici asupra unei chestiuni care a dat naștere la multe discuții. Existența unei ființe matematice trebuie considerată întotdeauna în raport cu metoda prin care ea se stabilește. Demonstrațiile de existență ale lui Lebesgue, despre care am vorbit mai sus, utilizează fie diagonala lui Cantor (o generalizare a metodei prin care se arată că mulțimea numerelor reale este nenumărabilă) fie totalitatea numerelor transfinite, de prima și a doua clasă. Numerele transfinite de prima și a doua clasă transfinită pot fi definite ca indicii de ordine ai claselor din clasificația lui Baire. Totalitatea lor este, evident, nenumărabilă. Aceste metode sînt socotite mai efective decît, de pildă, utilizarea axiomei alegerii a lui Zermelo, utilizare care este considerată cazul cel mai tipic de demonstrație neefectivă. Dar ele nu pot fi considerate în nici un caz niște raționamente constructive. Baire a dat un exemplu aritmetic (deci constructiv) de funcție de a treia clasă. Să expunem acest exemplu. Fie dezvoltarea în fracție continuă a fiecărui număr $x$*, cuprins între 0, 1; $x = \frac{1|}{|\alpha_1} + \frac{1|}{|\alpha_2} + \frac{1|}{|\alpha_3} + \cdots$. Să definim pe [0, 1] o funcție $f$ în felul următor: $f(x) = 1$, dacă șirul $\alpha_n$ tinde către $+\infty$, $f(x) = 0$ în cazul contrar. Se poate arăta că această funcție este de a treia clasă Baire.

Ludmila Keldîș a reușit să construiască un exemplu de funcție de a patra clasă Baire. Iată acest exemplu. Fie, din nou, dezvoltarea în fracție continuă a fiecărui $x$ cuprins între 0 și 1. Dacă în șirul $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, format cu cîturile necom-

---

* Este preferabil, în cele două exemple care urmează, ca $x$ să fie irațional, pentru ca dezvoltarea lui $x$ în fracție continuă să fie totdeauna esențial infinită.

plete ale dezvoltării lui $x$, există o infinitate de termeni distincţi, care se repetă, fiecare, de o infinitate de ori, atunci punem $f(x) = 1$. În cazul contrar, punem $f(x) = 0$.

Ulterior, Ludmila Keldîş a obţinut un rezultat şi mai puternic. Ea a dat un exemplu pur aritmetic de funcţie de a $n$-a clasă Baire, $n$ fiind un număr natural dat.

Dacă insistăm asupra diverselor tipuri de existenţă în matematică, o facem pentru că distincţia între aceste tipuri are o mare importanţă în teoria mulţimilor analitice şi proiective. Lebesgue a obţinut, fără să-şi dea seama, o mulţime analitică neboreliană. El nu i-a acordat atenţia cuvenită, pentru că ea juca un rol accesoriu în problema care-l preocupa, aceea a definirii unei funcţii care scapă oricărei reprezentări analitice (deci care este în afara clasificaţiei lui Baire). Lebesgue a utilizat în mod esenţial, în demonstraţia existenţei unei astfel de funcţii, totalitatea numerelor transfinite de prima şi a doua clasă. Vom vedea mai tîrziu că în acea clasificare a mulţimilor care ia ca punct de plecare mulţimile analitice, existenţa mulţimilor de diverse clase se demonstrează prin procedeul diagonal al lui Cantor.

Este un mare merit al lui Luzin de a fi observat că, după cum se exprimă el însuşi, în construcţia mulţimii definite de Lebesgue „se află conţinută, ca într-un germene, întreaga teorie a mulţimilor analitice". De această mulţime se leagă aşa-numita teorie geometrică a mulţimilor analitice, teorie construită în întregime de Luzin. Ceva mai tîrziu, după ce vom prezenta punctul de vedere al lui Suslin, vom da unele elemente ale teoriei geometrice a lui Luzin şi vom defini operaţia de trecere prin sită (sau de ciuruire), care joacă un rol principal în această teorie.

## MULŢIMI ANALITICE ŞI OPERAŢIA LUI SUSLIN

Am anunţat că introducerea noţiunii de mulţime analitică are ca punct de plecare clasa mulţimilor boreliene şi utilizează, ca operaţie fundamentală, proiecţia.

Cele mai simple mulţimi boreliene din plan sînt dreptunghiurile cu laturile paralele cu axele. Partea comună a unor

astfel de dreptunghiuri este sau tot un astfel de dreptunghi, sau mulţimea vidă. Proiecţia pe axa absciselor a unui astfel de dreptunghi este un interval unidimensional. Rezultă că cele mai simple mulţimi boreliene plane—intervalele bidimensionale — nu sînt în stare să furnizeze nimic nou atunci cînd sînt supuse operaţiilor de intersecţie şi de proiecţie.

Să trecem acum la clasa următoare de mulţimi boreliene, mulţimile deschise. O mulţime plană deschisă este o reuniune cel mult numărabilă de dreptunghiuri de tipul precedent. Însă este uşor de văzut că proiecţia unei reuniuni de mulţimi este egală cu reuniunea proiecţiilor acestor mulţimi. Rezultă astfel că proiecţia pe axa absciselor a unei mulţimi plane deschise este o mulţime deschisă liniară. Nici de astă dată nu am obţinut ceva nou, nu am ieşit din clasa boreliană de la care am pornit.

Să trecem acum la mulţimile de tip $G_\delta$. Fie $A$ o astfel de mulţime. $A$ este o intersecţie cel mult numărabilă de mulţimi deschise. Aici trebuie să fim mai atenţi, deoarece am văzut mai sus că proiecţia unei intersecţii nu este, în general, egală cu intersecţia proiecţiilor.

Avem:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^m = (D_1^1 \cup D_2^1 \cup D_3^1 \cup \cdots) \cap (D_1^2 \cup D_2^2 \cup \ldots) \cap$$

$$\cap (D_1^3 \cup D_2^3 \cup \cdots) \cap \cdots$$

sau

$$A = \bigcup_{(n_1, n_2, n_3, \ldots)} D_{n_1}^1 D_{n_2}^2 D_{n_3}^3 \cdots {}^{*}). \tag{2}$$

Reuniunea care furnizează pe $A$ parcurge toate şirurile posibile de numere naturale, deci este o reuniune nenumărabilă. $D_{n_i}^m$ sînt dreptunghiuri cu laturi paralele cu axele.

Avem:

$$pr\, A = \bigcup_{(n_1, n_2, n_3, \ldots)} pr(D_{n_1}^1 D_{n_2}^2 D_{n_3}^3 \ldots), \tag{3}$$

unde prin $pr$ am notat, şi vom nota şi de acum înainte, operaţia de proiecţie pe axa absciselor. Acum vom profita

---

* Uneori vom nota intersecţia unor mulţimi prin simpla juxtapunere a acestor mulţimi.

de o observaţie simplă, în legătură cu proiecţia unei intersecţii de mulţimi: fiind dat un şir descrescător de mulţimi plane, închise şi mărginite, proiecţia intersecţiei mulţimilor din şir este egală cu intersecţia proiecţiilor acestor mulţimi. Dreptunghiurile care figurează în (3) sînt mulţimi închise şi mărginite, însă şirul $D^1_{n_1}$, $D^2_{n_2}$, $D^3_{n_3}$, ... nu este, în general, un şir descrescător. Va trebui deci să înlocuim acest şir printr-unul descrescător, care însă să aibă aceeaşi intersecţie ca şi primul. Iată cum se poate face aceasta: punem

$$D^1_{n_1} \cap D^2_{n_2} \cap D^3_{n_3} \cap \dots \cap D^k_{n_k} = D_{n_1,\, n_2,\, \dots n_k}.$$

Este vizibil că

$$D^1_{n_1} \cap D^2_{n_2} \cap D^3_{n_3} \cap \dots = D_{n_1} \cap D_{n_1 n_2} \cap D_{n_1 n_2 n_3} \cap \dots . \quad (4)$$

În acelaşi timp avem

$$D_{n_1} \supset D_{n_1 n_2} \supset D_{n_1 n_2 n_3} \supset \cdots ,$$

deci

$$pr(D_{n_1} \cap D_{n_1 n_2} \cap D_{n_1 n_2 n_3} \cap \dots) = prD_{n_1} prD_{n_1 n_2} prD_{n_1 n_2 n_3} \dots \quad (5)$$

Să punem

$$prD_{n_1 n_2 \dots n_k} = \delta_{n_1 n_2 \cdots n_k}. \quad (6)$$

$\delta_{n_1 n_2 \cdots n_k}$, ca proiecţie a unui dreptunghi, este un interval unidimensional sau mulţimea vidă (dacă $D_{n_1 n_2 \cdots n_k}$ este mulţimea vidă).

Ţinînd seama de (3), (4) (5) şi (6), obţinem

$$pr\, A = \bigcup_{(n_1,\, n_2,\, n_3 \dots)} \delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_1 n_2 n_3} \cdots . \quad (7)$$

Faptul remarcabil este că nu numai mulţimile plane de tip $G_\delta$, dar orice mulţime boreliană plană furnizează, prin proiecţie, o mulţime de tipul membrului doi din (7). Este astfel de înţeles de ce tocmai expresia (7) a atras atenţia principală a lui Mihail Suslin. Suslin numeşte sistem determinant de mulţimi o familie de mulţimi $\{A_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ cu proprietatea că fiecărui sistem finit $n_1$, $n_2$, .... $n_k$ de

numere naturale îi corespunde o mulţime din familie, pe care o notăm cu $A_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Numim nucleu al sistemului determinant o mulţime pe care o notăm cu $N\{A_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ şi care are expresia

$$\bigcup_{(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)} A_{n_1} A_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2 n_3} \ldots .$$

Se numeşte mulţime analitică liniară sau mulţime $A$ nucleul oricărui sistem determinant format din intervale unidimensionale închise. Dacă un sistem determinant este format din intervale bidimensionale închise, nucleul său este o mulţime analitică plană. Ţinînd seama că mulţimea tuturor şirurilor de numere naturale este de puterea continuului, rezultă că familia mulţimilor analitice este de puterea continuului. Să mai observăm că din faptul că un interval este o mulţime analitică şi că reuniunea cel mult numărabilă şi intersecţia cel mult numărabilă de mulţimi analitice conduc tot la mulţimi analitice, rezultă următorul fapt extrem de important: orice mulţime boreliană este analitică. Din definiţia pusă şi din dezvoltările efectuate rezultă că proiecţia oricărei mulţimi boreliene este o mulţime analitică. Mai mult decît atît, avem în aceasta o proprietate caracteristică, o nouă definiţie a mulţimilor analitice. În adevăr, fie $M$ o mulţime analitică liniară, Fie $\{\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$ sistemul determinant format din intervale închise, care admite ca nucleu pe $M$, deci pentru care

$$M = \bigcup_{(n, n_2, \ldots, n_k \ldots)} \delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_1 n_2 n_3} \ldots . \tag{8}$$

Înlocuim fiecare interval $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ prin intersecţia $\delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \ldots \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Aceasta nu schimbă intersecţia $\delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_1 n_2 n_3} \cdots \delta_{n_1 \ldots n_k} \ldots$ care figurează în (8), transformînd-o în acelaşi timp într-o intersecţie a unui şir descrescător de mulţimi. Pentru a nu mai complica însă scrierea, admitem că

$$\delta_{n_1} \supset \delta_{n_1 n_2} \supset \delta_{n_1 n_2 n_3} \supset \cdots . \tag{9}$$

Să asociem fiecărui $\delta_k$ un dreptunghi $D_k$, a cărui proiecţie pe axa absciselor este $\delta_k$ şi astfel încît dacă $m \neq n$, $D_m$ nu

are puncte comune cu $D_n$. În interiorul fiecărui dreptunghi $D_{n_1}$, să construim acum dreptunghiuri $D_{n_1, n_2}$ ($n_2 = 1, 2, 3 \ldots$), ale căror proiecţii pe axa absciselor sînt intervalele $\delta_{n_1 n_2}$. Aceasta este posibil, deoarece $\delta_{n_1} \supset \delta_{n_1 n_2}$ (a se vedea (9)). Dreptunghiurile $D_{n_1 n_2}$ vor fi construite în aşa fel, încît dacă $p \neq q$, atunci $D_{n_1 p}$ nu are puncte comune cu $D_{n_1 q}$. Continuînd astfel, obţinem dreptunghiuri $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, ale căror proiecţii pe axa absciselor sînt tocmai intervalele $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, astfel încît fiecare dreptunghi $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ este conţinut în dreptunghiul $D_{n_1 n_2 \ldots n_{k-1}}$, iar dreptunghiurile $D_{n_1 n_2 \ldots n_{kp}}$ şi $D_{n_1 n_2 \ldots n_{kq}}$ nu au puncte comune dacă $p \neq q$.

Fie acum $E_k$ reuniunea tuturor dreptunghiurilor $D_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, formate cu $k$ indici. $E_k$ este o reuniune numărabilă de mulţimi boreliene, deci este ea însăşi boreliană. Mulţimea $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ este deci de asemenea boreliană. Rămîne să observăm acum că $pr\ A = M$, $M$ fiind mulţimea analitică dată de (8). Prin aceasta am demonstrat că mulţimile analitice liniare coincid cu proiecţiile mulţimilor boreliene din plan.

W. Sierpiński a arătat că nu este necesar, pentru a obţine totalitatea mulţimilor analitice liniare, să considerăm proiecţiile mulţimilor boreliene de toate tipurile posibile; el a arătat că orice mulţime analitică liniară este proiecţia unei mulţimi plane, de tipul borelian $G_\delta$.

## LEBESGUE, AUTOR INVOLUNTAR AL PRIMULUI EXEMPLU DE MULŢIME ANALITICĂ NEBORELIANĂ

Am văzut că descoperirea lui Suslin îşi are originea într-o greşeală din memoriul citat al lui Lebesgue. Dar teoria mulţimilor analitice mai are şi alte puncte de contact cu acest memoriu. Unul dintre cele mai importante a fost sesizat de Luzin. Iată despre ce este vorba.

La sfîrşitul memoriului său, Lebesgue efectuează următoarea construcţie: fie $r_1$, $r_2$, ..., $r_i$, ... un şir format cu toate numerele raţionale din [0, 1]. Fie, pentru un $x$ dat

din [0, 1], dezvoltarea diadică corespunzătoare (avînd grijă ca cifra 1 să figureze de o infinitate de ori).

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_i}{2^i} + \cdots.$$

Să suprimăm din șirul $\{r_i\}$ pe toți acei $r_i$ pentru care $\theta_i = 0$. Fie $r'_1\, r'_2 \cdots, r'_i, \cdots$ șirul rămas. Să considerăm acum mulțimea $E$ a numerelor $x$ din [0, 1] pentru care punctele corespunzătoare valorilor $r'_i$ formează o mulțime bine ordonată în raport cu relația $<$ (o mulțime de numere reale este bine ordonată, dacă orice parte a ei conține un cel mai mic element). Luzin arată că complementara $A$ a mulțimii $E$ este o mulțime analitică neboreliană.

Acesta este primul exemplu, în ordine cronologică, de mulțime analitică neboreliană, exemplu care a stat la baza cercetărilor lui Luzin și Suslin.

Pentru a înțelege valoarea exemplului lui Lebesgue, trebuie să nu uităm că familia mulțimilor analitice este de puterea continuului și, deci, că un exemplu de mulțime analitică neboreliană nu se poate obține cu ajutorul axiomei lui Zermelo, deoarece această axiomă, conducînd la $c^c$ alegeri posibile, ar furniza o clasă de mulțimi de putere superioară continuului.

Pentru a demonstra analiticitatea mulțimii $A$, Luzin a folosit următoarea variantă a noțiunii de mulțime analitică (se demonstrează echivalența ei cu definiția dată mai sus): „O mulțime liniară este analitică, dacă ea este mulțimea valorilor unei funcții reale de variabilă reală ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulțime cel mult numărabilă".

Acum putem înțelege sensul denumirii „analitică". Orice funcție de tipul de mai sus este limita unui șir convergent de funcții continue. De aici se deduce că o astfel de funcție este suma unei serii convergente de polinoame cu coeficienți întregi, deci o astfel de funcție este definită cu ajutorul unei expresii analitice.

Mulţimea $A$ a sugerat lui Luzin introducerea operaţiei de *ciuruire* sau de trecere prin sită. Fie două axe perpendiculare şi fie pătratul cu laturile date de ecuaţiile $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$. Să considerăm pe latura $x = 0$ a acestui pătrat toate punctele raţionale $r_1$, $r_2$, $\cdots r_n$, $\cdots$ (cuprinse între 0 şi 1). Să ducem prin $r_n$ paralela la axa $y = 0$ şi să împărţim porţiunea din paralelă, cuprinsă în pătratul de mai sus, în $2^n$ segmente egale. Să reţinem dintre aceste segmente numai pe cele de rang par (rangul fiind socotit de la stînga spre dreapta). Efectuînd această operaţie pentru fiecare $n$, obţinem o familie numărabilă de segmente paralele cu axa $y = 0$ şi formînd o mulţime $G$ densă în pătratul de mai sus. Este natural să numim sită reuniunea acestor segmente. Într-adevăr, orice dreaptă $x = x_0$ $(0 < x_0 \leqslant 1)$ întîlneşte în mulţimea $G$ o mulţime de puncte de ordonate raţionale, mulţime care se proiectează pe axa $x = 0$ după o parte $R_{x_0}$ a mulţimii $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. Deci mulţimea $G$ introduce, pentru fiecare paralelă la axa $x = 0$, o selecţie în mulţimea $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \cdots\}$, reţinînd doar o parte a acestei mulţimi. Este deci o veritabilă sită.

Dar lucrurile nu se opresc aici. Observăm că un punct $r_n$ de pe $x = 0$ aparţine proiecţiei $R_x$, dacă şi numai dacă avem $\theta_n = 1$ ($\theta_n$ fiind a $n$-a cifră în dezvoltarea diadică a lui $x_0$). De aici rezultă că mulţimea $A$ se caracterizează prin proprietatea că orice dreaptă $x = x_0$, cu $x_0 \in A$ (şi numai o astfel de dreaptă), întîlneşte în sita $G$ o mulţime care nu este bine ordonată, deci pentru care $R_{x_0}$ nu este bine ordonată (în raport cu ordinea în care punctele se întîlnesc de jos în sus). Spunem că mulţimea $A$ este obţinută prin ciuruire, cu ajutorul sitei $G$, prin mijlocirea proprietăţii de a nu fi bine ordonată.

Fie acum, în general, o mulţime $M$ densă în plan. Fie $\pi$ o proprietate care are sens pentru mulţimile liniare. Fie $\Lambda_\pi(M)$ mulţimea tuturor numerelor reale $x_0$, astfel încît mulţimea de intersecţie a dreptei $x = x_0$ cu $M$ are proprietatea $\pi$. Spunem că $\Lambda_\pi(M)$ se obţine ciuruind mulţimea plană $M$ cu ajutorul proprietăţii $\pi$.

Iată acum cîteva rezultate remarcabile legate de operația de ciuruire (trecere prin sită). C. Kuratovski și E. Szpilrajn-Marczewski au arătat că ori de cîte ori $M$ este închisă, iar $\pi$ este proprietatea de a conține cel puțin un punct de ordonată irațională, $\Lambda_\pi (M)$ este o mulțime analitică. S. Mazurkiewicz și W. Sierpiński au arătat că dacă $M$ este închisă, iar $\pi$ este proprietatea de a fi nenumărabilă, $\Lambda_\pi (M)$ este analitică. În sfîrșit, N. Luzin și W. Sierpiński au arătat că dacă $M$ este închisă, iar $\pi$ proprietatea de a nu fi bine ordonată după mărimea ordonatelor, $\Lambda_\pi(M)$ este de asemenea analitică.

### MULȚIMILE ANALITICE ȘI MULȚIMEA NUMERELOR IRAȚIONALE

Am semnalat mai sus că orice mulțime analitică poate fi obținută cu ajutorul unei funcții care are o mulțime cel mult numărabilă de puncte de discontinuitate. Acesta nu este singurul mod de a obține o mulțime analitică drept mulțime a valorilor unei anumite funcții. Iată cum se poate ajunge la un alt rezultat de acest tip: se poate arăta că orice mulțime analitică poate fi obținută ca nucleu al unui sistem determinant $\{\delta_{n_1 n_2, \ldots, n_k}\}$ pentru care intervalele închise $\delta_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ sînt nevide și verifică relația (9), iar lungimea intervalului $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ este inferioară lui $\frac{1}{k}$. În acest fel, intersecția $\delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_1 n_2 n_3} \ldots$, care apare în expresia (8) a unei mulțimi analitice, se reduce la un singur punct. Dar șirul $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... definește un număr irațional, și anume (se știe că un număr real admite o dezvoltare în fracție continuă infinită, dacă și numai dacă el este irațional):

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ldots}}}$$

Rezultă că mulțimea analitică dată coincide cu mulțimea valorilor funcției $f(x)$, definite pe mulțimea $I$ a numerelor

iraționale cuprinse între 0 și 1, prin condiția ca $f(x)$ să fie punctul comun intervalelor $\delta_{n_1}$, $\delta_{n_1 n_2}$, $\delta_{n_1 n_2 n_3}, \ldots$ Această funcție este continuă pe și prin mulțimea $I$. Întradevăr, fiind date două numere $x \in I$, $x' \in I$, $x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \cdots$ și $x' = \frac{1|}{|n_1'} + \frac{1|}{|n_2'} + \ldots$, avem $n_i = n_i'$, $1 \leqslant i \leqslant k$, pentru un $k$ cu atît mai mare cu cît $x$ și $x'$ sînt mai apropiate. Însă în aceste condiții, $f(x)$ și $f(x')$ aparțin unui același interval $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$, unde $k$ este cu atît mai mare, cu cît $x$ și $x'$ sînt mai apropiate. Amintindu-ne că lungimea lui $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ este inferioară lui $\frac{1}{k}$, rezultă continuitatea funcției $f(x)$. Am stabilit deci că orice mulțime analitică liniară este imagine continuă a mulțimii $I$. Însă mulțimea $I$ este la rîndul ei o imagine continuă a mulțimii tuturor numerelor iraționale. În concluzie: orice mulțime analitică liniară este o imagine continuă a mulțimii tuturor numerelor iraționale. Acest rezultat nu este de natură să ne surprindă, deoarece el este cunoscut dinainte (a se vedea prima parte a capitolului) pentru o clasă vastă de mulțimi analitice, aceea a mulțimilor boreliene. Vom arăta însă — și aceasta nu mai este valabil pentru mulțimile boreliene — că și reciproca teoremei de mai sus este adevărată. Fie, într-adevăr, $f(x)$ o funcție continuă pe și prin mulțimea $R$ a tuturor numerelor iraționale. Fie $G$ graficul lui $f(x)$, adică mulțimea plană a punctelor de coordonate $(x, f(x))$, unde $x \in R$. Mulțimea $A$ a valorilor lui $f(x)$ este proiecția, pe axa ordonatelor, a mulțimii plane $G$. Este deci suficient, pentru a demonstra analiticitatea mulțimii $A$, să arătăm că $G$ este o mulțime boreliană (deoarece s-a arătat mai sus că mulțimile analitice liniare coincid cu proiecțiile mulțimilor boreliene din plan). Pentru aceasta, vom arăta că $G$ este intersecția a două mulțimi boreliene. Fie $\bar{G}$ închiderea lui $G$, adică totalitatea punctelor lui $G$ și a punctelor de acumulare ale lui $G$. Este ușor de văzut că $\bar{G}$ este închisă, deci boreliană. Fie $\Gamma$ mulțimea tuturor punctelor din plan a căror abscisă este irațională. $\Gamma$ este o mulțime de tip $G_\delta$, deoarece complementara ei este reuniunea (numărabilă) a dreptelor $x = r$ ($r$ rațional),

iar o dreaptă este o mulţime închisă. Din faptul că $f(x)$ este continuă pe şi prin $R$, rezultă că $G = \bar{G} \cap \Gamma$, deci $G$ este boreliană ($G$ este de tip $G_\delta$, deoarece se arată uşor că orice mulţime închisă este de tip $G_\delta$). Am demonstrat deci că orice imagine continuă a mulţimii numerelor iraţionale este o mulţime analitică.

Să mai semnalăm, fără a intra în detalii, că orice mulţime analitică liniară este mulţimea valorilor unei funcţii superior semicontinue (adică pentru care $\lim\limits_{x' \to x} f(x') \leqslant f(x)$, oricare ar fi $x$) şi că valorile oricărei funcţii din clasificaţia lui Baire formează o mulţime analitică. (Valorile unei funcţii măsurabile nu formează, în general, nici măcar o mulţime măsurabilă.)

### CUM RECUNOAŞTEM DACĂ O MULŢIME ANALITICĂ ESTE BOREL IANĂ ?

Prima problemă mai importantă care s-a pus în teoria mulţimilor analitice a fost aceea a existenţei unei mulţimi analitice neboreliene. Astfel, scopul principal al lui Suslin a fost găsirea unei mulţimi boreliene plane, a cărei proiecţie pe o dreaptă este o mulţime liniară neboreliană. Am văzut mai sus că şi Luzin s-a ocupat mult de această problemă. După rezolvarea ei, era important să se stabilească criterii pentru recunoaşterea mulţimilor boreliene. Primul criteriu de acest tip a fost stabilit de Suslin, care a arătat că o condiţie necesară şi suficientă ca o mulţime să fie boreliană este ca atît ea, cît şi complementara ei să fie analitice. Acest rezultat este foarte important, deoarece pune în evidenţă existenţa unei clase noi de mulţimi, clase care se situează în mod natural după clasa mulţimilor analitice. Studiul lor s-a dovedit a fi dificil şi, după cum vom arăta, matematicienii nu au putut încă să rezolve principalele probleme legate de ele.

Ulterior s-au dat şi alte criterii de recunoaştere a mulţimilor boreliene. Astfel, Luzin a arătat că o condiţie necesară şi suficientă ca o mulţime nenumărabilă (orice mulţime numărabilă este boreliană) să fie boreliană este ca ea să fie imaginea biunivocă şi continuă într-un sens a mulţimii

numerelor iraţionale. De aici rezultă că noţiunea de mulţime boreliană nu este numai un invariant topologic, ci şi un invariant al unor transformări mai generale decît cele topologice, anume al transformărilor biunivoce şi continue într-un sens.

### PROPRIETĂŢI ALE MULŢIMILOR ANALITICE

O dată precizat locul mulţimilor boreliene în clasa mulţimilor analitice, o dată stabilit caracterul mai larg al acesteia din urmă, este natural să ne întrebăm care sînt proprietăţile de structură ale mulţimilor analitice şi comportarea lor faţă de diferite operaţii. Este uşor de văzut că o reuniune sau o intersecţie numărabilă de mulţimi analitice conduce la o mulţime analitică.

O mulţime analitică nenumărabilă conţine totdeauna o mulţime perfectă nevidă, deci are puterea continuului (pentru că o mulţime perfectă nevidă are puterea continuului). Orice mulţime analitică este măsurabilă în sens Lebesgue, dar există mulţimi măsurabile Lebesgue care nu sînt analitice.

O proprietate remarcabilă a mulţimilor analitice este dată de aşa-numitul primul principiu al mulţimilor analitice, separabilitatea $(B)$; fiind date două mulţimi analitice $A$ şi $B$, fără puncte comune, există două mulţimi boreliene $A_1$ şi $B_1$, astfel încît $A \subset A_1$, $B \subset B_1$ şi $A_1 \cap B_1 = 0$. Din această proprietate, găsită de Luzin, rezultă imediat jumătate din teorema de mai sus a lui Suslin. Într-adevăr, dacă o mulţime $A$ şi complementara ei $B$ ar fi analitice, atunci am avea $A_1 = A$, $B_1 = B$, deci $A$ ar fi boreliană.

Pe de altă parte, s-a putut da un exemplu de două mulţimi $A$ şi $B$ complementare analitice fără puncte comune, pentru care nu există două mulţimi boreliene $A_1$ şi $B_1$ fără puncte comune, astfel încît $A \subset A_1$, $B \subset B_1$.

Al doilea principiu al mulţimilor analitice, găsit tot de Luzin, este numit separabilitatea $(CA)$. Pentru a-l putea enunţa, să punem mai întîi o definiţie: spunem că două mulţimi $A$ şi $B$, fără puncte comune, sînt separabile cu ajutorul a două complementare analitice, dacă există două

mulţimi $A_1$ şi $B_1$ complementare analitice, astfel încît $A \subset A_1$, $B \subset B_1$, $A_1 \cap B_1$, $= 0$. Principiul al doilea se enunţă astfel: dacă din două mulţimi analitice se suprimă partea lor comună, atunci cele două părţi rămase sînt separabile (*CA*).

Există o complementară analitică nenumărabilă care nu conţine nici o mulţime perfectă nevidă? Aceasta este una dintre problemele cele mai grele privitoare la complementarele analitice. Asupra caracterului acestei probleme vom reveni mai tîrziu, cînd vom discuta şi despre alte probleme grele.

Să reţinem deocamdată că o complementară analitică este totdeauna măsurabilă în sens Lebesgue, deoarece mulţimile analitice sînt măsurabile.

Am văzut mai sus că noţiunea de mulţime analitică este un invariant al transformărilor continue. Complementarele analitice nu au această proprietate. S-a putut însă arăta că noţiunea de complementară analitică este un invariant topologic.

În sfîrşit, o legătură între mulţimile analitice şi complementarele lor este dată de următoarea teoremă: orice mulţime analitică este o imagine biunivocă şi continuă a unei complementare analitice.

Nu vom mai insista asupra proprietăţilor mulţimilor analitice şi ale complementarelor lor. Vrem acum să ilustrăm, prin exemple cît mai variate, felul în care intervine în matematică aceste mulţimi şi mai ales acele dintre ele care nu sînt boreliene.

## EXEMPLE DE MULŢIMI ANALITICE

Exemplul 1. Fie $f(x)$ o funcţie reală, definită şi continuă pe dreapta reală. Mulţimea valorilor luate de $f(x)$ în punctele ei de derivabilitate este analitică. Reciproc fiind dată o mulţime analitică liniară $E$, există o funcţie reală $f(x)$, definită şi continuă pe dreapta reală, astfel încît mulţimea valorilor luate de $(fx)$ în punctele de derivabilitate coincide cu $E$.

Exemplul 2. Fie $f(x)$ o funcţie reală, definită şi continuă pe dreapta reală. Valorile pe care $f(x)$ le ia de o infinitate

nenumărabilă de ori formează o mulţime analitică. Reciproc, orice mulţime analitică liniară este mulţimea valorilor pe care o anumită funcţie continuă le ia de o infinitate nenumărabilă de ori.

Exemplul 3. Valorile pe care o funcţie reală boreliană, definită pe o mulţime boreliană de numere reale, le ia o singură dată formează o complementară analitică. Orice complementară analitică liniară este mulţimea valorilor pe care o anumită funcţie reală, continuă, definită pe o mulţime închisă, le ia o singură dată.

Exemplul 4. Fie $f(x, y)$ o funcţie reală, definită şi continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Să considerăm valorile lui $x \in [0, 1]$, pentru care ecuaţia $f(x, y) = 0$ are o singură soluţie $y \in [0, 1]$. Să notăm cu $A(f)$ mulţimea tuturor valorilor lui $y$ care corespund unor astfel de valori ale lui $x$. $A(f)$ este o mulţime analitică. Reciproc, orice mulţime analitică din $[0, 1]$ este mulţimea $A(f)$ a unei anumite funcţii $f(x, y)$ continue pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

L. Kantorovici numeşte funcţie $A$ (funcţie $CA$) o funcţie reală $f$, pentru care mulţimea $\{x; f(x) > c\}$ este o mulţime analitică (complementară analitică), oricare ar fi $c$.

Exemplul 5. Fie $f(x, y)$ o funcţie mărginită şi boreliană. Funcţia $g(x) = \sup\limits_{y} f(x, y)$ este o funcţie $A$, iar funcţia $h(x) = \inf\limits_{y} f(x, y)$ este o funcţie $CA$. Funcţia $\limsup\limits_{y \to a} f(x, y)$ este o funcţie $A$, iar $\liminf\limits_{y \to a} f(x, y)$ este o funcţie $CA$.

Exemplul 6. Derivatele parţiale superioare (sau inferioare) ale lui $U$. Dini ale unei funcţii $f(x, y)$ boreliene sînt funcţii $A$ (sau $CA$)

Fie $2^I$ spaţiul tuturor mulţimilor închise conţinute în intervalul compact $I$. Acest spaţiu poate fi metrizat cu distanţa introdusă de matematicianul român Dimitrie Pompeiu. Fiind date două mulţimi închise $E \subset I$, $F \subset I$, distanţa între $E$ şi $F$ este, prin definiţie, cel mai mare dintre următoarele două numere

$$\sup_{x \in E} \rho(x, F), \ \sup_{y \in F} \rho(y, E),$$

unde prin $\rho(x, F)$ (respectiv $\rho(y, E)$) am notat marginea inferioară a distanţelor lui $x$ la diversele puncte din $F$ (res-

pectiv marginea inferioară a distanţelor lui $y$ la diversele puncte din $E$). În spaţiul $2^I$ cu distanţa astfel introdusă se pot defini, ca şi pe dreaptă, mulţimile închise şi deschise. Mulţimile boreliene din $2^I$ vor fi definite ca mulţimile aparţinînd celui mai mic corp care conţine mulţimile închise. Prin definiţie, o parte a lui $2^I$ este analitică, dacă ea este imagine continuă a unei părţi boreliene.

Cu această pregătire putem trece la

Exemplul 7. În spaţiul $2^I$, mulţimea avînd drept elemente mulţimile închise nenumărabile din $I$, este o mulţime analitică neboreliană.

Să considerăm acum spaţiul $\mathcal{C}^I$ al funcţiilor reale, continue pe intervalul compact $I$. Distanţa între două elemente $x$ şi $y$ din $\mathcal{C}^I$ se defineşte ca

$$\sup_{t \in I} |x(t) - y(t)|.$$

În spaţiul $\mathcal{C}^I$ se definesc, ca şi în spaţiul $2^I$, mai întîi părţile boreliene, apoi cele analitice, apoi complementarele analitice.

Exemplul 8. În spaţiul $\mathcal{C}^I$, funcţiile derivabile în fiecare punct din $I$ formează o complementară analitică neboreliană.

Iată acum şi un exemplu din teoria funcţiilor de variabilă complexă:

Exemplul 9. Mulţimea valorilor asimptotice ale unei funcţii meromorfe în cercul unitate este o mulţime analitică. Reciproc, orice mulţime analitică este mulţimea valorilor asimptotice ale unei anumite funcţii meromorfe în cercul unitate.

Vom indica, în cele ce urmează, două exemple de probleme a căror tratare utilizează în mod esenţial mulţimile analitice şi complementarele lor.

## PROBLEMA UNIFORMIZĂRII MULŢIMILOR SAU PROBLEMA FUNCŢIILOR IMPLICITE

Să considerăm mai întîi aşa-numita problemă a uniformizării mulţimilor. Fie în planul $XOY$ o mulţime $E$ de puncte. Vom spune că $E$ este uniformă în raport cu axa

$OX$, dacă orice paralelă la axa $OY$ întîlnește mulțimea $E$ în cel mult un punct.

Vom spune că mulțimea $E$ este uniformizabilă, dacă există o parte uniformă $E_1$ a lui $E$, avînd pe $OX$ aceeași proiecție ca și $E$. $E_1$ se numește uniformizatoarea lui $E$.

Este de observat că existența lui $E_1$ este asigurată de axioma alegerii. Se pune însă problema dacă mulțimea uniformizatoare $E_1$ poate fi aleasă astfel încît proprietățile ei să fie cît mai apropiate de cele ale lui $E$. Această problemă este studiată, într-un caz particular, în analiză, la capitolul despre funcții implicite. În adevăr, acolo se dă o funcție continuă $f(x, y)$, prevăzută cu anumite calități, și se uniformizează mulțimea închisă definită de relația $f(x, y) = 0$, cu o mulțime de asemenea închisă.

Ce se întîmplă însă dacă mulțimea $E$ a punctelor de coordonate $x$, $y$, pentru care $f(x, y) = 0$, nu mai este închisă? Problema s-a complicat și analiza clasică nu mai este în stare să răspundă la ea. Totuși, problema este deosebit de importantă, atît pentru analiza clasică, cît și pentru analiza funcțională. Este important, de pildă, să se știe dacă $E$, fiind o mulțime boreliană, poate fi uniformizată cu o mulțime $E_1$ de asemenea boreliană. Este vizibil că aici este vorba despre o generalizare a problemei funcțiilor implicite.

Nu este greu de văzut că răspunsul la problema de mai sus este negativ. În adevăr, știm că există o mulțime $E$ boreliană în plan (chiar de tip $G_\delta$) a cărei proiecție pe $OX$ este o mulțime $E^*$ neboreliană (deoarece orice mulțime analitică liniară este proiecția unui anume $G_\delta$). Dacă $E$ ar putea fi uniformizată cu o mulțime $F_1$ boreliana, atunci mulțimea $E^*$ ca imagine biunivocă și continuă (proiecția este o transformare continuă) a lui $E_1$, ar trebui să fie de asemenea boreliană.

N. Luzin și P.S. Novikov au arătat mai mult, anume că există mulțimi boreliene care nu pot fi uniformizate cu mulțimi boreliene, deși proiecția lor pe $OX$ este boreliană.

Se pune atunci întrebarea, dacă nu cumva orice mulțime boreliană se poate uniformiza cu o mulțime analitică.

Această problemă este importantă, între altele, și pentru faptul că dacă mulțimea punctelor de coordonate $(x, f(x))$

este analitică, atunci se poate arăta că funcția $f$ este măsurabilă. Și aici răspunsul este negativ. S-a putut însă arăta că orice mulțime boreliană din plan se poate uniformiza cu ajutorul unei complementare analitice. În sfîrșit, în ce privește mulțimile analitice, ele nu se pot uniformiza, în general, nici măcar cu complementare analitice. În schimb, după cum a arătat matematicianul japonez Kondo, orice complementară analitică se poate uniformiza cu ajutorul unei complementare analitice.

Menționăm că rezultatele de mai sus asupra uniformizării mulțimilor, ca și cele privitoare la curbele analitice, despre care vom vorbi îndată au fost publicate pentru prima dată de către Luzin, în revista românească „Mathematica" de la Cluj (vol. 4, 1930 și vol. 10, 1935).

## PROBLEMA CURBELOR ANALITICE

Un fenomen deosebit de interesant, în ce privește importanța mulțimilor analitice, îl prezintă problema curbelor-analitice. Înțelegem — aici — prin „curbă analitică plană" o mulțime plană analitică, uniformă în raport cu $OX$. O mulțime boreliană, uniformă în raport cu $OX$, este o „curbă plană boreliană". S-a putut arăta că dacă o funcție $f$ este boreliană, atunci graficul ei este o curbă boreliană și reciproc. Enunțul acestui rezultat nu conține nici o referire la mulțimi analitice. Cu toate acestea, demonstrația lui nu s-a putut efectua decît cu ajutorul mulțimilor analitice. În fapt, s-a demonstrat că dacă graficul unei funcții este o mulțime analitică, atunci funcția este boreliană, și că dacă funcția este boreliană, atunci și graficul ei este o mulțime boreliană. Problema de a se găsi pentru teorema citată mai sus o altă demonstrație, fără mulțimi analitice, nu a fost rezolvată. W. Sierpiński este de părere că această problemă este prea grea chiar și în cazuri particulare, ca de pildă cel în care graficul funcției este o mulțime boreliană de tip $G_\delta$.

În orice caz, trebuie să reținem că în cadrul mulțimilor plane uniforme noțiunile de mulțime boreliană și

mulțime analitică sînt indiscernabile. Nu același lucru se poate spune despre mulțimile uniforme complementare analitice. Acestea sînt uneori neboreliene.

## MULȚIMI PROIECTIVE

Vom da acum noțiunea de mulțime proiectivă și unele proprietăți ale ei.

Mulțimile boreliene sînt, prin definiție, mulțimi proiective de clasă zero. Mulțimile proiective de clasă $2n+1$ sînt imaginile continue ale mulțimilor proiective de clasă $2n$; mulțimile proiective de clasă $2n$ sînt complementarele mulțimilor proiective de clasă $2n—1$. Este vizibil că mulțimile proiective de clasă 1 coincid cu mulțimile analitice, iar cele de clasă 2 coincid cu complementarele analitice. Se poate arăta că o reuniune numărabilă sau o intersecție numărabilă de mulțimi proiective de clasă $n$ este tot o mulțime proiectivă de clasă $n$. Ca și noțiunea de mulțime analitică sau de complementară analitică, noțiunea de mulțime proiectivă de clasă $n$ este un invariant topologic.

După această introducere în teoria mulțimilor proiective, se ridică în mod firesc unele întrebări: care este justificarea denumirii de „proiective" dată acestor mulțimi? Există, pentru orice număr natural $n$, o mulțime proiectivă de clasă $n$ care nu este de clasă inferioară lui $n$?

La prima întrebare răspunsul este simplu. Mulțimile proiective mai pot fi definite ca fiind obținute plecînd de la mulțimi boreliene, prin aplicarea alternativă, de un număr finit de ori, a operațiilor de proiecție și de trecere la complementară. Proiecția trebuie înțeleasă efectuîndu-se dintr-un spațiu euclidian pe un spațiu cu o dimensiune mai puțin. În felul acesta, dacă dorim să obținem mulțimile liniare proiective de ordin $n$, va trebui să pornim de la mulțimile boreliene dintr-un spațiu euclidian cu un număr suficient de mare de dimensiuni.

Răspunsul la întrebarea a doua este mai complicat, dar mai interesant. Să observăm mai întîi că dat fiind

că mulțimile analitice din spațiul euclidian $n$-dimensional se obțin ca proiecții ale mulțimilor de tip $G_\delta$ din spațiul $n+1$-dimensional, rezultă că putem obține mulțimile proiective liniare de clasă oricît de mare pornind de la mulțimile închise situate într-un spațiu euclidian de dimensiune destul de mare și aplicînd succesiv operațiile de proiecție (ortogonală) pe spațiul cu o dimensiune mai puțin și de trecere la complementară. Este suficient, pentru aceasta, să observăm că orice mulțime de tip $F_\sigma$ din spațiul euclidian $n$-dimensional este proiecția ortogonală a unei anumite mulțimi închise din spațiul $n+1$-dimensional.

## MULȚIMI UNIVERSALE

Vom introduce acum noțiunea de „mulțime universală" pentru o familie $F$ de mulțimi. Fie $F$ o familie de mulțimi liniare. O mulțime $U$ din plan se numește universală în raport cu familia $F$, dacă orice mulțime din familia $F$ se poate obține ca intersecție a mulțimii $U$ cu o anumită dreaptă paralelă cu axa ordonatelor. În mod analog se introduce noțiunea de „mulțime universală" pentru spații de dimensiune mai mare.

Să presupunem, pentru moment, că în spațiul euclidian $n+1$-dimensional există o mulțime închisă $U$ universală pentru mulțimile închise în spațiul euclidian cu $n$-dimensiuni. În acest caz, proiecția mulțimii $U$ în spațiul $n$-dimensional va fi o mulțime universală pentru mulțimile de tip $F_\sigma$ din spațiul euclidian $n—1$-dimensional, iar complementarea acestei proiecții va fi o mulțime $G_\delta$, universală pentru mulțimile $G_\delta$ din spațiul n—1-dimensional. Ținînd seama de observația făcută mai sus, proiecția acestei mulțimi $G_\delta$ universală va fi o mulțime analitică universală pentru mulțimile analitice din spațiul euclidian cu $n—2$-dimensiuni. Continuînd tot așa, este lesne de înțeles că vom obține, în cele din urmă, o mulțime plană proiectivă de clasă oricît de mare dorim, universală pentru mulțimile liniare de aceeași clasă proiectivă.

Trebuie numai să avem grijă să pornim cu un $n$ destul de mare.

Să rezumăm: am demonstrat că dacă există mulţimi închise universale, atunci există, pentru orice $n$, mulţimi proiective de clasă $n$, universale. Vom demonstra ceva mai jos existenţa unei mulţimi închise universale. Deocamdată, vom arăta că o mulţime $U$ plană, proiectivă de clasă $n$, universală, nu poate aparţine unei clase proiective inferioare lui $n$.

## UN EXEMPLU SIMPLU DE MULŢIME ANALITICĂ NEBORELIANĂ

Fie mai întîi $n = 1$. Trebuie să arătăm că $U$ nu este boreliană. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că $\complement U$ (complementara lui $U$) nu este analitică. În adevăr, să presupunem că $\complement U$ este analitică. Fie $D$ o dreaptă din plan, neparalelă cu nici una dintre axele de coordonate. $D \cap \complement U$ este analitică. Deci proiecţia $P$ a acestei intersecţii pe axa ordonatelor este analitică. Deoarece U este universală pentru mulţimile analitice liniare, există $a$, astfel încît dreapta $x = a$ întîlneşte în $U$ o mulţime $\Pi$, a cărei proiecţie pe axa ordonatelor să fie tocmai $P$. Fie $Q$ punctul de intersecţie al dreptei $D$ cu dreapta $x = a$. Se pot ivi două situaţii:

1. $Q \notin D \cap U$. În acest caz, proiecţia $q$ a lui $Q$ pe $x = 0$ nu aparţine lui $P$, după însăşi definiţia mulţimii $P$. Însă, ţinînd seamă de definiţia mulţimii $\Pi$, rezultă că punctul $Q$ nu aparţine lui $\Pi$, deci nici lui $U$, ceea ce este contrar ipotezei.

2. $Q \in D \cap U$, deci $Q \in D \cap \complement U$, deci $q \in P$. Aceasta înseamnă că $Q \in \Pi$, de unde rezultă că $Q \in U$, adică $Q \in D \cap U$, deoarece $Q$ este un punct al dreptei $D$. Am ajuns iarăşi la o contradicţie.

Pentru a putea trage concluzia că $U$ este o mulţime analitică neboreliană, mai trebuie să arătăm că există mulţimi închise universale. Să trecem la această demonstraţie.

Fie $I_1$, $I_2$, ... $I_n$, ... un şir format cu toate intervalele deschise liniare, cu extremităţi raţionale. Este vizibil că orice mulţime liniară este complementara unei anu-

mite reuniuni de astfel de intervale, deci orice mulțime închisă liniară este caracterizată, definită, de un anumit șir de astfel de intervale.

Fie acum un număr irațional $x$ cuprins între 0 și 1 și fie dezvoltarea lui în fracție continuă:

$$x = \cfrac{1}{r_x^1 + \cfrac{1}{r_x^2 + \cfrac{1}{r_x^3 + \dots}}}$$

Să asociem lui $x$ mulțimea închisă $F_x$ dată de complementara mulțimii $I_{r_x^1} \cup I_{r_x^2} \cup I_{r_x^3} \cup \dots$. Reciproc, fiecărei mulțimi liniare închise $F$ îi asociem numărul irațional a cărui dezvoltare în fracție continuă are drept cîturi necomplete indicii de ordine ai intervalelor din șirul $\{I_n\}$, care alcătuiesc complementara lui $F$. Se stabilește în felul acesta o corespondență biunivocă între mulțimea numerelor iraționale din (0 ,1) și mulțimea mulțimilor închise liniare.

Să definim acum o mulțime plană $E$ în modul următor: punctul de coordonate $x$, $y$ aparține lui $E$, dacă $x$ este irațional și cuprins între 0 și 1, iar $y$ aparține mulțimii închise $F_x$, asociate lui $x$. Mulțimea $E$ nu este închisă; dar dacă îi adăugăm punctele ei de acumulare, atunci obținem o mulțime $U$ închisă. Vom arăta că $U$ este o mulțime universală pentru mulțimile închise liniare.

Mai întîi să observăm că dacă $x_0$ este irațional, atunci orice punct din $U$ situat pe dreapta $x = x_0$ aparține obligatoriu lui $E$. În adevăr, fie $I = (\alpha, \beta)$ un interval din complementara mulțimii închise $E \cap \{x = x_0\}$. Numerele iraționale suficient de apropiate de $x$ au o dezvoltare în fracție continuă, care coincide, pînă la un rang oricît de depărtat dorim, cu dezvoltarea în fracție continuă a lui $x_0$. Aceasta înseamnă că există $\varepsilon > 0$, astfel încît pentru orice $x^*$ irațional, pentru care $|x - x_0| < \varepsilon$, intervalul $(\alpha, \beta)$ este conținut în intersecția $E \cap \{x = x^*\}$. De aici rezultă că intervalul $I = (\alpha, \beta)$ nu poate conține puncte din $E'$.

Să arătăm acum universalitatea lui $U$. Fie, pentru aceasta o mulțime $F$ închisă liniară. Fie $\xi$ numărul irațional

asociat lui $F$ prin corespondenţa biunivocă stabilită mai sus. Este vizibil că dreapta $x = \xi$ întîlneşte în mulţimea $U$ exact mulţimea închisă $F$.

Metoda dezvoltată mai sus, numită metoda mulţimilor universale, este apreciată de obicei ca o metodă efectivă de demonstraţie. Este însă evident că această metodă este o variantă a diagonalei lui Cantor. Aceasta a apărut clar în demonstrarea neanaliticităţii lui $\complement U$. Dar poate că acest lucru va apărea mai clar, dacă vom arăta că intersecţia dintre $U$ şi dreapta $D$ este o mulţime analitică liniară neboreliană (amintim că $D$ este o dreaptă oarecare, neparalelă cu vreuna dintre axele de coordonate). În adevăr, fie $\Gamma$ această intersecţie. $\Gamma$ este evident analitică. Dacă $\Gamma$ ar fi boreliană, atunci $D - \Gamma$ ar fi de asemenea boreliană, deci analitică. Fie atunci $H$ proiecţia ortogonală a mulţimii $D - \Gamma$ pe axa ordonatelor. $H$ este analitică, fiind imagine continuă a mulţimii analitice $D - \Gamma$. Există atunci o dreaptă $x = \eta$ care întîlneşte în $U$ o mulţime analitică $H^*$, a cărei proiecţie pe axa ordonatelor este tocmai $H$. Fie $S$ punctul de intersecţie al lui $H^*$ cu dreapta $D$. $S$ aparţine lui $D - \Gamma$, deoarece se proiectează într-un punct din $H$. În acelaşi timp, $S$ aparţine lui $H^*$, deci lui $U$, deci lui $\Gamma = D \cap U$. Am ajuns astfel la o contradicţie care demonstrează neanaliticitatea mulţimii $D - \Gamma$.

Pentru a se demonstra existenţa mulţimilor proiective de orice clasă finită, procedăm prin inducţie completă, ţinînd seamă că dacă o mulţime proiectivă de clasă $2n + 1$ are complementara de aceeaşi clasă $2n + 1$, atunci ele sînt de clasa $2n$. În felul acesta, este suficient să stabilim existenţa claselor proiective de rang impar. Aceasta atrage de la sine şi existenţa claselor proiective de rang par.

## PROBLEME NEREZOLVATE

Dacă în unele privinţe teoria mulţimilor proiective este o generalizare aproape imediată a teoriei mulţimilor analitice, trebuie să spunem că există unele probleme

care, deși la mulțimi analitice și-au găsit o rezolvare relativ simplă, nu au putut fi încă rezolvate pentru mulțimile proiective. Iată cîteva astfel de probleme.

Se știe că mulțimile analitice nenumărabile au puterea continuului. În ce privește însă complementarele analitice și proiecțiile acestor complementare, se știe doar că puterea lor nu poate fi niciodată mai mică decît a continuului și mai mare decît alef unu (alef unu este puterea mulțimii claselor lui Baire; se știe că această mulțime este nenumărabilă). Dar problema puterii acestor mulțimi nu a fost complet rezolvată (în ipoteza neacceptării ipotezei continuului).

În ce privește mulțimile proiective de clasă mai ridicată, trebuie să spunem că despre puterea lor nu se știe încă nimic.

Problema puterii mulțimilor proiective ar fi rezolvată, dacă s-ar putea răspunde afirmativ la următoarea întrebare: o mulțime proiectivă nenumărabilă conține obligatoriu o mulțime perfectă nevidă? Dar această problemă n-a putut fi rezolvată nici măcar pentru complementarele analitice. Ea este apreciată ca una dintre cele mai grele probleme ale matematicii.

Am semnalat că mulțimile analitice și complementarele lor sînt măsurabile Lebesgue. În ce privește însă mulțimile proiective de clasă $n \geqslant 3$, problema măsurabilității lor nu a fost rezolvată.

Natura specială a ultimelor două probleme rezultă din următoarele fapte stabilite de K. Gödel și P.S. Novikov. Există o complementară analitică nenumărabilă, pentru care ipoteza că nu conține nici o mulțime perfectă nevidă nu este în contradicție cu sistemul de axiome al teoriei mulțimilor. Există o mulțime proiectivă pentru care ipoteza nemăsurabilității Lebesgue nu este în contradicție cu sistemul de axiome al teoriei mulțimilor.

Aceste rezultate arată că, indiferent de soluția pe care o vor căpăta problemele semnalate mai sus, este exclusă posibilitatea unor teoreme ca: „orice complementară analitică nenumărabilă conține o mulțime perfectă" sau „orice mulțime proiectivă este măsurabilă Lebesgue".

15—439

Se spune că o mulţime $E$ posedă proprietatea lui Baire, dacă este de forma $(G - P) \cup R$, unde $G$ este deschisă, iar $P$ şi $R$ sînt de prima categorie. Proprietatea lui Baire este analogul descriptiv al măsurabilităţii Lebesgue. Mulţimile analitice şi complementarele lor posedă această proprietate. Nu se cunoaşte însă dacă mulţimile proiective de clasă $n \geqslant 3$ posedă sau nu proprietatea lui Baire.

Mai sînt numeroase probleme deschise cu privire la mulţimile proiective, mai cu seamă în legătură cu separabilitatea şi cu uniformizarea acestor mulţimi. Dificultatea lor este foarte mare. Unele contribuţii esenţiale au fost aduse în această problemă de P.S. Novikov.

Rolul mulţimilor proiective în teoria mulţimilor şi a funcţiilor apare chiar în studiul unor fenomene relativ simple. Astfel, o mulţime analitică plană nu poate fi uniformizată totdeauna — după cum am semnalat — cu o mulţime analitică şi nici măcar cu o complementară analitică. În schimb, uniformizarea unei mulţimi analitice se poate efectua totdeauna cu ajutorul unei proiecţii de complementare analitice. Iată acum un exemplu de mulţime proiectivă de clasă 3, care apare în teoria funcţiilor: În spaţiul funcţiilor reale, de două variabile reale, continue pe pătratul unitate, funcţiile $f(x, y)$, pentru care există un $y$, astfel încît derivata parţială $f'_x(x, y)$ există oricare ar fi $x \in [0, 1]$, formează o mulţime proiectivă de clasă 3, care nu este de clasă inferioară lui 3.

O reuniune numărabilă de mulţimi proiective nu mai este, în general, o mulţime proiectivă. Clasificarea mai departe a mulţimilor, luînd ca punct de plecare mulţimile proiective, a fost efectuată de L. Kantorovici şi E. Livenson. Ei au studiat, sistematic, operaţiile analitice generale introduse de F. Hausdorff şi, independent, de A. Kolmogorov. Aceste operaţii conţin, ca un caz particular, operaţia prin care Suslin obţinea mulţimile analitice ca nuclee ale sistemelor determinante de intervale.

Teoria mulţimilor analitice şi proiective a fost extinsă la anumite spaţii topologice. În cadrul spaţiilor metrice complete separabile, teoria lor este o simplă transpunere a teoriei clasice. Încercarea de a face teoria mulţimilor

proiective în spaţii topologice mai generale decît cele arătate s-a lovit de dificultăţi. Ea a fost doar în parte realizată, datorită în primul rînd matematicienilor polonezi şi japonezi.

*

Unele dintre cele mai importante contribuţii în teoria mulţimilor analitice şi proiective au fost publicate în revista „Mathematica" din Cluj. Astfel, articolul lui Luzin *Unele observaţii asupra curbelor complementare analitice*, publicat în vol. 10 din „Mathematica", în 1934, este reprodus în întregime în noua ediţie a cărţii lui Luzin, apărută la Moscova în 1953. De asemenea, trebuie să semnalăm că W. Sierpiński, una dintre figurile cele mai proeminente ale matematicii poloneze, care a adus o contribuţie fundamentală în teoria mulţimilor analitice şi proiective, a publicat o seamă de articole pe această temă în „Mathematica" din Cluj. W. Sierpiński are şi meritul de a fi popularizat în rîndul matematicienilor români aceste preocupări, prin lecţiile pe care le-a ţinut la Universitatea din Cluj în anii premergători celui de-al doilea război mondial.

Aceste lecţii se află editate într-o broşură în limba română.

Florin Vasilescu, în teza sa de doctorat din 1925 asupra funcţiilor multiforme de variabile reale, s-a referit printre primii matematicieni români la mulţimile analitice şi proiective. În cartea sa, la sfîrşitul capitolului despre funcţii implicite, Luzin semnalizează într-o notă specială teza lui Florian Vasilescu.

Asupra importanţei mulţimilor analitice şi proiective au insistat, cu diverse ocazii, şi alţi matematicieni români. Astfel, Simion Stoilow în cartea sa, *Principiile topologice ale teoriei funcţiilor analitice* (în limba franceză), atrage atenţia asupra faptului stabilit de Kierst că orice mulţime analitică este mulţimea valorilor asimptotice ale unei anumite funcţii meromorfe în cercul unitate.

# To the readers

The Mathematical Analysis has been included in the curricula of numerous institutes of higher education since a longtime. Wide sections of intelectuals come into contact with elements of this discipline, but for objective reasons, they have not the possibility to penetrate deeper in its problems and methods. The present book is intended for this large category of readers who, because their type of occupation and lack of time, cannot study systematically and deeply the Mathematical Analysis, but who desire however to get some general view about this science. We address ourselves to everybody who at least once, read a book of Mathematical Analysis of University level. Absorbed by the technical difficulties with which he is faced, the reader of a treatise of Mathematical Analysis, sometimes neglects the very living, developing, side of analysis, of its trends, the problems which give birth to new notions, the syntheses which the analysis operates. But once the technicalities overcomed, the reader may feel the need of a retrospective look at the analysis, his main attention being focused on the origin, significance and evolution of its basic notions, with the view of deciferring its future development.

We would be very glad if the book will be of some help on this road.

*Solomon Marcus*

# Contents

## III

## What is the length of a curve?



## IV

## Itinerary in the theory of the integral

## V

## In the world ol non-borelian sets and functions

# Cuprinsul

## III

### Ce este lungimea unei curbe?



## IV

### Itinerar în teoria integralei

## V

## Ce se întîmplă dincolo de mulțimile și funcțiile boreliene?

Redactor resp. de carte : MARIA BORICEAN
Tehnoredactor : VICTORIA STĂNCULESCU

*Dat la cules 27.05.1967. Bun de tipar 20.10.1967. Tiraj 8500+140 ex. Hîrtie scris II A 63 g/m². Format 90×100/32. Coli editoriale 11,83. Coli tipar 7,50 A. 6706. Indici de clasificare zecimală : pentru bibliotecile mari 517, pentru bibliotecile mici 51.*

Tiparul executat sub comanda nr. 439 la
Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918",
Str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95,
București — Republica Socialistă România

# ERATĂ

| *Pag.* | *Rînd* | *În loc de:* | *Se va citi* |
|---|---|---|---|
| 67 | 1 sus<br>2 sus<br>5 jos | $\underset{\cdot}{\triangle}$ | $\Delta$ |
| 133 | 13 sus | natural | real |

Lucrarea "Noţiuni de analiză matematică"
de S. Marcus

Lei 5,75



**editura științifică**

Lucrarea prezintă, fără a pune accent pe aspectele tehnice, apariția principalelor noțiuni ale analizei matematice, semnificația lor și evoluția pînă la stadiul actual. Astfel, sînt expuse noțiunile de funcție, limită, lungimea unei curbe, aria unei suprafețe, integrală, precum și unele noțiuni de teoria mulțimilor și topologie. Se evită calculele și demonstrațiile mai grele, accentul fiind pus pe evoluția ideilor. Lucrarea se adresează elevilor din ultimele clase de liceu, studenților, profesorilor de liceu și, în general, celor interesați în aprofundarea problematicii și metodelor analizei matematice, ea oferind o retrospectivă deosebită, și originală asupra dezvoltării analizei și a tendințelor ce o animă.